مبتکران

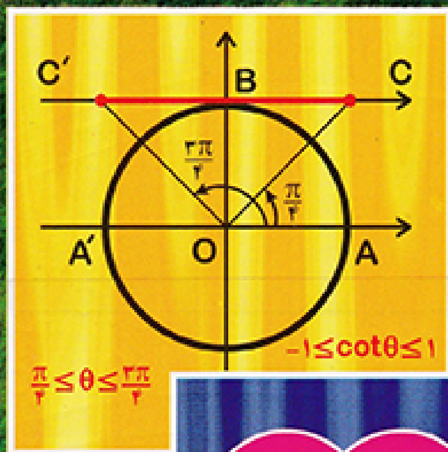
ویرایش چهارم

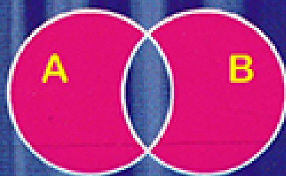
ریاضیات ۱

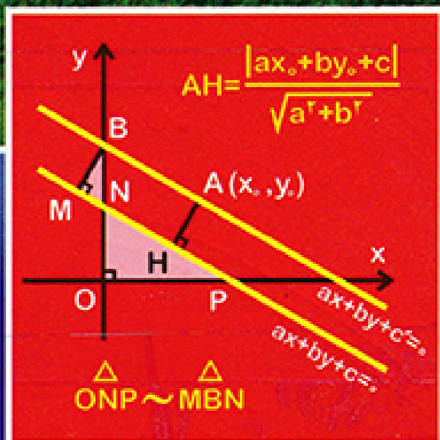
شامل بیش از ۶۰۰ مثال و ۷۴۰ تمرین

حسین انصاری ـ سیامک قادر

قابل استفادهٔ
دانش‌آموزان و دبیران
مدارس ممتاز و
مراکز استعدادهای درخشان







ریاضیات (۱)

ویرایش چهارم

قابل استفاده دانش‌آموزان و دبیران مدارس ممتاز
و مراکز استعدادهای درخشان

حسین انصاری ـ سیامک قادر

سرشناسه	: انصاری، حسین
عنوان و پدیدآور	: ریاضیات ۱قابل استفاده دانش آموزان و دبیران مدارس ممتاز... تألیف/حسین انصاری- سیامک قادر
مشخصات نشر	: تهران؛ مبتکران؛ پیشروان ۱۳۹۰
مشخصات ظاهری	: ۴۰۴ص؛ مصور، جدول.
شابک	: ۵-۱۱۵۴-۷-۰-۹۶۴-۹۷۸
موضوع	: ریاضیات -- کتاب‌های درسی -- راهنمای آموزشی (متوسطه).
موضوع	: ریاضیات -- پرسش‌ها و پاسخ‌ها (متوسطه).
رده‌بندی کنگره	: ۸۱۳۸۶ /ج ۵ پ / ۹۵۶ LB
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی	: ۱۶۹۵۱ – ۸۸ م



مبتکران (پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲) پیشروان (پروانه نشر: ۲۶۲۳)



ریاضیات (۱)

مؤلفان: حسین انصاری – سیامک قادر

نوبت چاپ:شصت وسوم ۱۳۹۰(چاپ اول:پاییز ۱۳۷۹)

ویراست: چهارم

شمارگان: ۳۰۰۰جلد

حروف نگاری: مبتکران

لیتوگرافی: مبتکران

چاپ:ولیعصر قیمت: ۶۶۰۰تومان

مرکزپخش: تهران میدان انقلاب، خیابان فخررازی،خیابان نظری، پلاک ۵۹،کدپستی ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱

تلفن: ۶۴۹۱ دورنگار ۶۶۴۰۶۳۶۲ www. mobtakeran.com

به‌نام هستی‌بخش

مقدمه

سپاس بیکران خدای یکتا را که توفیق ویراست سوم این اثر را در دهمین سالگرد انتشار آن به ما عطا فرمود. تاکنون حدود ۲۰۰۰۰۰ نسخه از این کتاب چاپ و در اختیار علاقه‌مندان قرار گرفته. مدارس برتر و دانش‌آموزان سرآمد از آن بهره جسته‌اند و به خاطر این امر به خود می‌بالیم.

سعی شده در ویرایش جدید، کتاب به سرفصل‌های جدید آموزشی نزدیک‌تر باشد. فصل اول کتاب قبلی (منطق ریاضی) را حذف نموده‌ایم. تمارین جدیدی را به آن افزوده‌ایم و نهایت کوشش را به خرج داده‌ایم تا کتاب، بی عیب و نقص باشد. اما به هر حال همواره این هدف به صورت آرمانی برایمان بوده که کم‌تر به آن دست یافته‌ایم. لذا از حضور سروران عزیزی که کتاب را تورّق می‌نمایند خواهشمندیم موارد اصلاحی را متذکر گردند تا بتوانیم در چاپ‌های بعدی از آن استفاده نماییم.

از تمام دوستانی که ما را با ارسال پیام‌های خویش مورد لطف و محبت قرار داده‌اند تشکر می‌نماییم و از مسئولان دلسوز مؤسسه‌ی انتشاراتی مبتکران به ویژه **جناب آقای دهقانی** مدیریت محترم آن انتشارات که همواره ما را تشویق بر رفع کاستی‌ها نموده‌اند قدردانی می‌نماییم.

تابستان ۹۰

انصاری ـ قادر

(تلفن تماس با مؤلفان: ۴۴۲۵۲۳۷۰ می‌باشد.)

فهرست

عناوین صفحه

فصل اول

فصل دوم

فهرست

عناوین | صفحه

فصل سوم

فهرست

عناوین | صفحه

فصل چهارم

فهرست

عناوین صفحه

فصل پنجم

فصل ششم

فهرست

عناوین صفحه

فصل هفتم

فهرست

عناوین | صفحه

فهرست

عناوین | صفحه

فصل یازدهم

فهرست

عناوین | صفحه

فصل دوازدهم

فهرست

عناوین صفحه

فصل سیزدهم

فصل اول

مجموعه‌ی اعداد

اعداد طبیعی: عددهای ۱، ۲، ۳ و ... را که برای شمارش به‌کار می‌روند اعداد طبیعی می‌نامند. مجموعه‌ی اعدد طبیعی را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم.

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$$

اعداد حسابی: اگر عدد صفر را به مجموعه‌ی اعداد طبیعی اضافه کنیم، مجموعه‌ی اعداد حسابی پدید می‌آید. مجموعه‌ی اعداد حسابی را با W نشان می‌دهیم.

$$W=\{۰,۱,۲,۳,...\}$$

نکته: اعداد طبیعی زوج را با E و اعداد طبیعی فرد را با O نمایش می‌دهیم

$$E=\{۲,۴,۶,...\}=\{۲k\,|k\in\mathbb{N}\}$$

$$O=\{۱,۳,۵,...\}=\{۲k-۱|k\in\mathbb{N}\}$$

تعریف: یک مجموعه را نسبت به یک عمل بسته گوییم در صورتی‌که هر دو عضوی از آن مجموعه را اختیار کرده و آن عمل را روی دو عضو انجام دهیم، حاصل عمل در آن مجموعه باشد.

نکته: مجموع دو عدد طبیعی یک عدد طبیعی است ($\mathbb{N}$ نسبت به جمع بسته است.)

نکته: حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی یک عدد طبیعی است. ($\mathbb{N}$ نسبت به ضرب بسته است)

نکته: اختلاف دو عدد طبیعی ممکن است عددی طبیعی نباشد. ($\mathbb{N}$ نسبت به تفریق بسته نیست.)

نکته: حاصل تقسیم دو عدد طبیعی ممکن است عددی طبیعی نباشد. ($\mathbb{N}$ نسبت به تقسیم بسته نیست.)

خواص جمع و ضرب اعداد طبیعی

۱) خاصیت جابه‌جایی:

$$a+b=b+a$$
$$a\times b=b\times a$$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$$

۳) عضو خنثی:

$$a+۰=۰+a=a$$
$$a\times ۱=۱\times a=a$$

۴) خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع:

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$

مثال ۱ : آیا تفریق اعداد طبیعی دارای خاصیت شرکت‌پذیری هست یا خیر؟ تقسیم چه‌طور؟

حل:

تفریق و تقسیم در مجموعه‌ی اعداد طبیعی خاصیت شرکت‌پذیری ندارند. مثلاً:

$$\left.\begin{array}{l}(۹-۷)-۴=۲-۴=-۲\\ ۹-(۷-۴)=۹-۳=۶\end{array}\right\}\Rightarrow (۹-۷)-۴\neq ۹-(۷-۴)$$

$$\left.\begin{array}{l}(۴۸\div ۶)\div ۲=۸\div ۲=۴\\ ۴۸\div(۶\div ۲)=۴۸\div ۳=۱۶\end{array}\right\}\Rightarrow (۴۸\div ۶)\div ۲\neq ۴۸\div(۶\div ۲)$$

مثال ۲ : ثابت کنید مجموع دو عدد طبیعی زوج، عددی زوج است.

حل:

فرض می‌کنیم x و y دو عدد طبیعی زوج باشند:

$$x = ۲m \qquad (m \in \mathbb{N})$$
$$y = ۲n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
$$x + y = ۲m + ۲n = ۲(m+n) = ۲k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

مثال ۳ : ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد طبیعی زوج عددی زوج است.

حل:

فرض می‌کنیم $x = ۲m \; (m \in \mathbb{N})$ و $y = ۲n \; (n \in \mathbb{N})$:

$$x \times y = ۲m \times ۲n = ۲\times(۲mn) = ۲k \quad (k \in \mathbb{N})$$

☆ مجموعه‌ی اعداد صحیح

مجموعه‌ی اعداد صحیح از مجموعه‌ی اعداد طبیعی و صفر و اعداد صحیح منفی تشکیل شده که آن‌را با $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}$$

نکته: مجموع و حاصل‌ضرب و تفاضل هر دو عدد صحیح عددی صحیح است. اما حاصل تقسیم دو عدد صحیح ممکن است عددی صحیح نباشد. بنابراین $\mathbb{Z}$ نسبت به جمع و تفریق و ضرب بسته است ولی نسبت به تقسیم بسته نیست.

نکته: خاصیت‌های جابه‌جایی، شرکت‌پذیری، پخشی و هم‌چنین وجود عضو خنثی که درباره‌ی اعداد طبیعی برشمردیم در مجموعه‌ی اعداد صحیح نیز برقرارند.

مثال ۴ : حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید:

الف) $۱۳ - ۲\times(-۷)$

ب) $-۱۱ - ۳\times(-۵)\times(-۲)$

ج) $۹ - ۳\times(-۲)^۳$

د) $۵ - ۵\left[۳ - ۳(۲-۳)^۷\right]^۲ \times(-۲)$

هـ) $(-۳)(-۴)^۲ - (-۵)(-۲)^۳(-۶)$

حل:

الف) $۱۳-۲\times(-۷)=۱۳-(-۱۴)=۱۳+۱۴=۲۷$

ب) $-۱۱-۳\times(-۵)\times(-۲)=-۱۱-۳۰=-۴۱$

ج) $۹-۳\times(-۲)^{۳}=۹-۳\times(-۸)=۹-(-۲۴)=۹+۲۴=۳۳$

د) $۵-۵\left[۳-۳(۲-۳)^{۷}\right]^{۲}\times(-۲)=۵-۵[۳-۳\times(-۱)]^{۲}\times(-۲)=۵-۵(۶)^{۲}\times(-۲)$
$=۵-۵\times۳۶\times(-۲)=۵-(-۳۶۰)=۳۶۵$

هـ) $(-۳)(-۴)^{۲}-(-۵)(-۲)^{۳}(-۶)=(-۳)\times۱۶-(-۵)(-۸)(-۶)=-۴۸-(-۲۴۰)$
$=-۴۸+۲۴۰=۱۹۲$

مثال ۵ : حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $۱-۴+۳-۶+۵-۸+...+۶۷-۷۰$

ب) $(۱۰-۱۲)(۱۲-۱۴)(۱۴-۱۶)...(۲۸-۳۰)$

ج) $۳^{۵}+۳^{۶}+۳^{۷}+...+۳^{۲۰}$

د) $۲۰+۲۵+۳۰+...+۱۰۰$

حل:

الف) $(۱-۴)+(۳-۶)+(۵-۸)+...+(۶۷-۷۰)=\underbrace{(-۳)+(-۳)+(-۳)+...+(-۳)}_{\text{۳۴ تا}}$
$=۳۴\times(-۳)=-۱۰۲$

ب) $(۱۰-۱۲)(۱۲-۱۴)(۱۴-۱۶)...(۲۸-۳۰)=\underbrace{(-۲)(-۲)(-۲)...(-۲)}_{\text{۱۰ تا}}=(-۲)^{۱۰}=۱۰۲۴$

ج) $x=۳^{۵}+۳^{۶}+۳^{۷}+...+۳^{۲۰}$
$\underline{۳x=۳^{۶}+۳^{۷}+۳^{۸}+...+۳^{۲۱}}$
$۳x-x=۳^{۲۱}-۳^{۵}\Rightarrow ۲x=۳^{۲۱}-۳^{۵}\Rightarrow x=\dfrac{۳^{۲۱}-۳^{۵}}{۲}$

د) $x=۲۰+۲۵+۳۰+...+۱۰۰$
$\underline{x=۱۰۰+۹۵+۹۰+...+۲۰}$
$۲x=۱۲۰+۱۲۰+۱۲۰+...+۱۲۰\Rightarrow ۲x=۱۷\times۱۲۰\Rightarrow x=۱۰۲۰$

☆ مجموعه‌ی اعداد گویا

مجموعه‌ی اعداد گویا در واقع مجموعه‌ی کسرهایی مانند $\frac{a}{b}$ است که a و b اعدادی صحیح و $b \neq ۰$ باشد. مجموعه‌ی اعداد گویا را با Q نشان می‌دهیم.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰ \right\}$$

اعداد $\frac{۳}{۷}$، $\frac{-۱}{۴}$، $\frac{۴}{-۹}$، ۰ ، ۱۹ و ۲۷- اعداد گویا می‌باشند.

درباره‌ی اعداد گویا و محاسبات مربوط به آن‌ها سال‌های قبل به تفصیل مطالبی خوانده‌اید. در این جا به ذکر چند مثال اکتفا می‌کنیم.

مثال ۶ : حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $-\frac{۷}{۱۵} + \frac{۳}{۱۰} - \frac{۹}{-۲۰}$

ب) $\frac{-۱۱}{۲۴} - \frac{۵}{۳۶} - \frac{-۷}{۱۲}$

ج) $\frac{۱۳}{۲۴} - \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۷}{۲}$

د) $\frac{۹۱}{۱۳۰} + \frac{۶۳}{-۱۰۵} - \frac{-۷۷}{۲۷۵}$

حل:

الف) $\frac{-۷}{۱۵} + \frac{۳}{۱۰} + \frac{۹}{۲۰} = \frac{-۲۸ + ۱۸ + ۲۷}{۶۰} = \frac{۱۷}{۶۰}$

ب) $\frac{-۱۱}{۲۴} - \frac{۵}{۳۶} + \frac{۷}{۱۲} = \frac{-۳۳ - ۱۰ + ۴۲}{۷۲} = \frac{-۱}{۷۲}$

ج) $\frac{۱۳}{۲۴} - \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۷}{۲} = \frac{۱۳}{۲۴} - \frac{۷}{۱۶} = \frac{۲۶ - ۲۱}{۴۸} = \frac{۵}{۴۸}$

د) $\frac{۹۱}{۱۳۰} - \frac{۶۳}{۱۰۵} + \frac{۷۷}{۲۷۵} = \frac{۷}{۱۰} - \frac{۳}{۵} + \frac{۷}{۲۵} = \frac{۳۵ - ۳۰ + ۱۴}{۵۰} = \frac{۱۹}{۵۰}$

مثال ۷ : حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\left(۱ - \frac{۱}{۵}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۶}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۷}\right) \ldots \left(۱ - \frac{۱}{۷۰}\right)$

ب) $۱\frac{۱}{۱۰} + ۲\frac{۲}{۱۰} + ۳\frac{۳}{۱۰} + \ldots + ۵۵\frac{۵۵}{۱۰}$

حل:

الف) $\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\dots\left(1-\frac{1}{70}\right)=\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\dots\frac{69}{70}=\frac{4}{70}=\frac{2}{35}$

ب) $1\frac{1}{10}+2\frac{2}{10}+3\frac{3}{10}+\dots+55\frac{55}{10}=(1+2+3+\dots+55)+\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\dots+\frac{55}{10}\right)$

$$=\frac{55\times56}{2}+\frac{55\times56}{20}=1540+154=1694$$

مثال ۸ : حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{\frac{1}{12}-\frac{1}{18}-\frac{1}{24}}{\frac{5}{24}-\frac{7}{36}-\frac{-1}{48}}$$

حل:

$$\frac{\frac{1}{12}-\frac{1}{18}-\frac{1}{24}}{\frac{5}{24}-\frac{7}{36}+\frac{1}{48}}=\frac{\frac{6-4-3}{72}}{\frac{30-28+3}{144}}=\frac{\frac{-1}{72}}{\frac{5}{144}}=\frac{-1\times144}{5\times72}=\frac{-2}{5}$$

مثال ۹ : اگر $a<b$ باشد، ثابت کنید: $\frac{b-a}{a\times b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

حل:

$$\frac{b-a}{a\times b}=\frac{b}{a\times b}-\frac{a}{a\times b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

مثال ۱۰ : حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\frac{1}{12\times13}+\dots+\frac{1}{39\times40}$

ب) $\frac{5}{1\times6}+\frac{5}{6\times11}+\frac{5}{11\times16}+\dots+\frac{5}{51\times56}$

ج) $\frac{1}{3\times15}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\dots+\frac{1}{19\times21}$

د) $\frac{3}{2\times4}+\frac{3}{4\times6}+\frac{3}{6\times8}+\dots+\frac{3}{18\times20}$

حل:

الف) $\frac{۱}{۱۰\times۱۱}+\frac{۱}{۱۱\times۱۲}+\frac{۱}{۱۲\times۱۳}+...+\frac{۱}{۳۹\times۴۰}=\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۱۱}+\frac{۱}{۱۱}-\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۱۳}+...$

$+\frac{۱}{۳۹}-\frac{۱}{۴۰}=\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۴۰}=\frac{۳}{۴۰}$

ب) $\frac{۵}{۱\times۶}+\frac{۵}{۶\times۱۱}+\frac{۵}{۱۱\times۱۶}+...+\frac{۵}{۵۱\times۵۶}=\left(۱-\frac{۱}{۶}\right)+\left(\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۱}\right)+\left(\frac{۱}{۱۱}-\frac{۱}{۱۶}\right)+...$

$+\left(\frac{۱}{۵۱}-\frac{۱}{۵۶}\right)=۱-\frac{۱}{۵۶}=\frac{۵۵}{۵۶}$

ج) $\frac{۱}{۳\times۵}+\frac{۱}{۵\times۷}+\frac{۱}{۷\times۹}+...+\frac{۱}{۱۹\times۲۱}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳\times۵}+\frac{۲}{۵\times۷}+\frac{۲}{۷\times۹}+...+\frac{۲}{۱۹\times۲۱}\right)$

$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۹}+...+\frac{۱}{۱۹}-\frac{۱}{۲۱}\right)$

$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲۱}\right)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۲۱}=\frac{۱}{۷}$

د) $\frac{۳}{۲\times۴}+\frac{۳}{۴\times۶}+\frac{۳}{۶\times۸}+...+\frac{۳}{۱۸\times۲۰}=\frac{۳}{۲}\left(\frac{۲}{۲\times۴}+\frac{۲}{۴\times۶}+\frac{۲}{۶\times۸}+...+\frac{۲}{۱۸\times۲۰}\right)$

$=\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}+...+\frac{۱}{۱۸}-\frac{۱}{۲۰}\right)=\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲۰}\right)=\frac{۳}{۲}\times\frac{۹}{۲۰}=\frac{۲۷}{۴۰}$

مثال ۱۱ : کسری مساوی $\frac{۶۵}{۱۹}$ پیدا کنید که مجموع صورت و مخرج آن ۱۳۲ باشد.

حل:

$\frac{۶۵}{۹۱}=\frac{۵}{۷}$

کسر مساوی $\frac{۵}{۷}$ را $\frac{۵x}{۷x}$ درنظر می‌گیریم.

$۵x+۷x=۱۳۲\rightarrow ۱۲x=۱۳۲\rightarrow x=۱۱$

$\frac{۵x}{۷x}=\frac{۵\times۱۱}{۷\times۱۱}=\frac{۵۵}{۷۷}$

مثال ۱۲ : سه کسر بین دو کسر $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۵}{۱۸}$ پیدا کنید.

حل:

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۶}{۱۸}$$

$$\frac{۵}{۱۸}<x<\frac{۶}{۱۸}\Rightarrow\frac{۲۰}{۷۲}<x<\frac{۲۴}{۷۲}$$

$$\frac{۲۰}{۷۲}<\frac{۲۱}{۷۲}<\frac{۲۲}{۷۲}<\frac{۲۳}{۷۲}<\frac{۲۴}{۲۷}$$

مثال ۱۳ : بین کسرهای $\frac{۵}{۱۲}$ و $\frac{۷}{۱۶}$ دو کسر نام ببرید که مخرج آن‌ها ۱۰۰ باشد.

حل:

کوچک‌ترین عددی که بر ۱۲ و ۱۶ و ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد، عدد ۱۲۰۰ است.

$$\frac{۵}{۱۲}=\frac{۵۰۰}{۱۲۰۰} \qquad \frac{۷}{۱۶}=\frac{۵۲۵}{۱۲۰۰}$$

بین اعداد ۵۰۰ و ۵۲۵ دو عدد ۵۰۴ و ۵۱۶ بر ۱۲ بخش‌پذیرند.

$$\frac{۵۰۰}{۱۲۰۰}<\frac{۵۰۴}{۱۲۰۰}<\frac{۵۱۶}{۱۲۰۰}<\frac{۵۲۵}{۱۲۰۰}$$

$$\frac{۵}{۱۲}<\frac{۴۲}{۱۰۰}<\frac{۴۳}{۱۰۰}<\frac{۷}{۱۶}$$

مثال ۱۴ : سعید $\frac{۲}{۷}$ پول خود را به خواهرش و نصف بقیه‌ی پول را به برادرش داد و $\frac{۱}{۴}$ پولش را کتاب خرید و ۱۲۰۰ ریال برایش باقی ماند. کل پول سعید چه‌قدر بوده است؟

حل:

$$\frac{۷}{۷}-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷} \qquad \frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۷}=\frac{۵}{۱۴}$$

$$\frac{۲}{۷}+\frac{۵}{۱۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۲۵}{۲۸} \qquad \frac{۲۸}{۲۸}-\frac{۲۵}{۲۸}=\frac{۳}{۲۸}$$

$$۱۲۰۰\div\frac{۳}{۲۸}=۱۲۰۰\times\frac{۲۸}{۳}=۱۱۲۰۰$$

مثال ۱۵ : **علی کاری را در ۸ ساعت و رضا همان کار را در ۱۲ ساعت انجام می‌دهند. دو نفر با هم کار را در چه مدتی انجام می‌دهند؟**

حل:

$$\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳+۲}{۲۴}=\frac{۵}{۲۴}$$

$$\frac{۱}{\frac{۵}{۲۴}}=\frac{x}{\frac{۲۴}{۲۴}}\rightarrow x=\frac{۱}{\frac{۵}{۲۴}}=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$ ساعت

نماد متعارفی و اعشاری

هر عدد گویا را به دو صورت کسر متعارفی یا عدد اعشاری نشان می‌دهند که چگونگی تبدیل آن‌ها به هم را بررسی می‌کنیم.

☆ تبدیل نماد متعارفی به نماد اعشاری

برای تبدیل یک عدد کسری به نماد اعشاری کافی است صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم و خارج قسمت را درنظر بگیریم.

از این جهت نماد اعشاری کسرها را به دو دسته‌ی تحقیقی و متناوب می‌توان تقسیم کرد.

۱- دسته‌ی اول کسرهایی هستند که به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، به باقی‌مانده‌ی صفر می‌رسیم و عمل تقسیم در مرحله‌ای متوقف می‌شود. نماد اعشاری این کسرها، تحقیقی (مختوم) نامیده می‌شوند.

مثال ۱۶ : **نماد اعشاری کسرهای $\frac{۳}{۵}$، $\frac{۷}{۲۰}$ و $\frac{۱}{۸}$ تحقیقی است، زیرا:**

$$\frac{۷}{۲۰}=۰/۳۵$$

```
 ۷۰ | ۲۰
    |------
    | ۰/۳۵
 ۶۰
 ----
 ۱۰۰
 ۱۰۰
 ----
   ۰
```

$$\frac{۳}{۵}=۰/۶$$

```
 ۳۰ | ۵
    |-----
    | ۰/۶
 ۳۰
 ----
  ۰
```

$$\begin{array}{r|l} ۱۰ & ۸ \\ \underline{۸} & ۰/۱۲۵ \\ ۲۰ & \\ \underline{۱۶} & \\ ۴۰ & \\ \underline{۴۰} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\frac{۱}{۸} = ۰/۱۲۵$$

کسرهای تحویل‌ناپـذیر $\frac{۳}{۵}$، $\frac{۷}{۲۰}$ و $\frac{۱}{۸}$ کـه در مثـال فـوق مطـرح شـدند مخـرج‌هایـشان فقـط از عامل‌های اول ۲ یا ۵ تشکیل شده‌اند.

نکته: به‌طور کلی کسرهای تحویل‌ناپذیری که در تجزیه‌ی مخرجشان فقـط عامـل ۲ یـا ۵ ظاهر شوند دارای نماد اعشاری تحقیقی می‌باشند. زیرا اگر در تجزیه‌ی مخرج کسری مـثلاً با عبارت $۲^m \times ۵^n$ که در آن $m > n$ مواجه شدیم می‌تـوانیم صـورت و مخـرج کـسر را در ۵^{m-n} ضرب کرده و نماها را مساوی کنیم و بـه ایـن ترتیـب در مخـرج تـوانی از ۱۰ می‌سازیم که چنین کسرهایی را می‌توان به‌صورت نماد اعشاری تحقیقی نوشت.

مثال ۱۷ : معین کنید نماد اعشاری کدام‌یک از کسرهای زیر تحقیقی است؟

$\frac{۵}{۹}$ و $\frac{۱۱}{۱۴۰}$ و $\frac{۲۱}{۶۰۰}$ و $\frac{۳۱}{۴۰}$

حل:

کسر $\frac{۳۱}{۴۰}$ تحویل‌ناپذیر و مخرج آن $۴۰ = ۲^۳ \times ۵$ فقط از عامل‌هـای ۲ یـا ۵ تـشکیل شـده. لـذا تحقیقی است.

کسر $\frac{۲۱}{۶۰۰}$ برابر کسر $\frac{۷}{۲۰۰}$ است که مخرج آن $۲۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲$ فقط از عامل‌های ۲ یا ۵ تـشکیل شده. لذا تحقیقی است.

کسر $\frac{۱۱}{۱۴۰}$ تحویل‌ناپذیر و مخرج آن $۱۴۰ = ۲^۲ \times ۵ \times ۷$ علاوه بر عامل‌های ۲ و ۵ شامل عامل ۷ نیز می‌باشد. بنابراین تحقیقی نیست.

کسر $\frac{۵}{۹}$ تحویل‌ناپذیر و مخرج آن $۹ = ۳^۲$ عامل ۲ یا ۵ ندارد، لذا تحقیقی نیست.

۲-دسته‌ی دوم کسرهایی هستند که وقتی صورتشان را بر مخرجشان تقسیم می‌کنیم هیچ‌گاه به باقی‌مانده صفر نمی‌رسیم و در خارج قسمت بعد از ممیز یک یا چند رقم به‌طور متناوب تکرار می‌شود که این ارقام تکراری را **دوره‌ی گردش** می‌نامند. نماد اعشاری این کسرها را متناوب می‌نامند. این دسته از کسرها خود به دو دسته تقسیم می‌شوند. در برخی از آن‌ها هنگام تبدیل به نماد اعشاری بلافاصله بعد از ممیز دوره‌ی گردش آغاز می‌شود که نماد اعشاری آن‌ها را **متناوب ساده** می‌نامیم. برخی دیگر نیز به هنگام تقسیم صورت به مخرج بلافاصله بعد از ممیز دوره‌ی گردش آغاز نمی‌شود بلکه یک یا چند رقم می‌آیند سپس دوره‌ی گردش آغاز می‌گردد. نماد اعشاری این کسرها را **متناوب مرکب** می‌نامند. ارقامی که بعد از ممیز می‌آیند ولی تکرار نمی‌شوند **دوره‌ی غیرگردش** نامیده می‌شوند.

مثال ۱۸ : معین کنید نماد اعشاری کدام‌یک از کسرهای زیر متناوب ساده و کدام‌یک متناوب مرکب می‌باشند.

$\frac{۷}{۶}$ و $\frac{۴}{۳۳}$ و $\frac{۱۶}{۴۵}$ و $\frac{۲}{۳}$

حل:

```
۱۶۰ | ۴۵
۱۳۵ | ۰/۳۵۵
----
۲۵۰
۲۲۵
----
۲۵۰
۲۲۵
----
 ۲۵
```

$\frac{۱۶}{۴۵} = ۰/۳\overline{۵}$

```
۲۰ | ۳
۱۸ | ۰/۶۶...
---
۲۰
۱۸
---
 ۲
```

$\frac{۲}{۳} = ۰/\overline{۶}$

```
۷  | ۶
۶    ۱/۱۶۶...
--
۱۰
 ۶
--
۴۰
۳۶
--
۴۰
۳۶
--
 ۴
```

$\frac{۷}{۶}=۱/۱\overline{۶}$

```
۴۰  | ۳۳
۳۳    ۰/۱۲۱۲...
--
۷۰
۶۶
--
۴۰
۳۳
--
۷۰
۶۶
--
 ۴
```

$\frac{۴}{۳۳}=۰/\overline{۱۲}$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود نماد اعشاری کسرهای $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۴}{۳۳}$ متناوب ساده و نماد اعشاری کسرهای $\frac{۱۶}{۴۵}$ و $\frac{۷}{۶}$ متناوب مرکب می‌باشند.

نکته: برای تشخیص این‌که نماد اعشاری یک کسر متناوب ساده یا مرکب است به این ترتیب عمل می‌کنیم که ابتدا کسر را ساده می‌کنیم تا به یک کسر تحویل‌ناپذیر تبدیل شود. سپس مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. اگر در تجزیه‌ی مخرج عامل ۲ یا ۵ وجود نداشته باشد و حداقل یکی از اعداد اول دیگر ظاهر شود، نماد اعشاری کسر، متناوب ساده و اگر در تجزیه‌ی مخرج عامل‌های ۲ یا ۵ و حداقل یک عامل اول و غیر از ۲ یا ۵ وجود داشته باشد نماد اعشاری کسر، متناوب مرکب است.

مثال ۱۹ : معین کنید نماد اعشاری کسرهای زیر تحقیقی، متناوب ساده یا مرکب است؟

$\frac{۳۳}{۶۰}$ و $\frac{۲۱}{۴۵}$ و $\frac{۴}{۱۸}$

حل:

کسر $\frac{۴}{۱۸}$ برابر $\frac{۲}{۹}$ که مخرج آن یعنی $۳^۲=۹$ فقط عامل ۳ دارد. لذا نماد اعشاری کسر $\frac{۴}{۱۸}$ متناوب ساده است.

کسر $\frac{۲۱}{۴۵}$ برابر $\frac{۷}{۱۵}$ و مخرج آن $۱۵ = ۳ \times ۵$ علاوه بر عامل ۵ عامل دیگری نیز دارد. لذا نماد اعشاری کسر متناوب مرکب است.

کسر $\frac{۳۳}{۶۰}$ برابر $\frac{۱۱}{۲۰}$ و مخرج آن $۲۰ = ۲^۲ \times ۵$ فقط از عامل‌های ۲ یا ۵ تشکیل شده بنابراین نماد اعشاری کسر تحقیقی است.

مثال ۲۰ : کسر $\frac{۴۹۹۷}{۹۰۰۰}$ را به‌صورت اعشاری تبدیل کرده بگویید نماد اعشاری متناوب ساده است یا مرکب.

حل:

۴۹۹۷۰	۹۰۰۰
۴۵۰۰۰	۰/۵۵۵۲۲...
۴۹۷۰۰	
۴۵۰۰۰	
۴۷۰۰۰	
۴۵۰۰۰	
۲۰۰۰۰	
۱۸۰۰۰	
۲۰۰۰	

$\frac{۴۹۹۷}{۹۰۰۰} = ۰/۵۵۵\overline{۲}$ متناوب مرکب

مثال ۲۱ : در کسر کوچک‌تر از واحد $\frac{۷n}{۴۵}$ عدد طبیعی n را چنان تعیین کنید که نماد اعشاری کسر متناوب ساده شود.

حل:

با توجه به این‌که مخرج عامل ۵ دارد عدد n را می‌توان برابر ۵ درنظر گرفت تا کسر به‌صورت $\frac{۷}{۹} = \frac{۷ \times ۵}{۴۵}$ تبدیل شود که متناوب ساده است.

مثال ۲۲ : از دو عدد $\circ/\overline{۵}$ و $\circ/۵۵۵$ کدام بزرگ‌تر است؟ چرا؟

حل:

رقم مرتبه‌ی یک ده‌هزارم‌های عدد $\circ/\overline{۵}$ برابر ۵ و رقم یک ده‌هزارم‌های عدد $\circ/۵۵۵$ صفر است. لذا:
$\circ/\overline{۵} > \circ/۵۵۵$

مثال ۲۳ : از دو عدد $\circ/\overline{۵}$ و $\circ/۶$ کدام بزرگ‌تر است؟

حل:

رقم مرتبه‌ی یک دهم‌های عدد $\circ/\overline{۵}$ برابر ۵ و رقم یک دهم‌های عدد $\circ/۶$ برابر ۶ است. لذا:

$\circ/۶ > \circ/\overline{۵}$

☆ تبدیل نماد اعشاری به نماد متعارفی

۱- تبدیل نماد اعشاری تحقیقی به متعارفی:

مثال ۲۴ :

$$\circ/۲۵ = \frac{۲۵}{۱\circ\circ} = \frac{۱}{۴} \qquad \circ/۷ = \frac{۷}{۱\circ}$$

$$۲/\circ\circ۱ = ۲\frac{۱}{۱\circ\circ\circ} = \frac{۲\circ\circ۱}{۱\circ\circ\circ} \qquad \circ/\circ۱۳ = \frac{۱۳}{۱\circ\circ\circ}$$

۲- تبدیل نماد اعشاری متناوب ساده به کسر متعارفی:

برای تبدیل نماد اعشاری متناوب ساده به کسر متعارفی، عدد اعشاری را مساوی x فرض کرده و طرفین تساوی حاصل را با توجه به این‌که دوره‌ی گردش یک رقمی، دو رقمی، سه رقمی باشد به ترتیب در ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ ضرب می‌کنیم. سپس طرفین دو معادله‌ی حاصل را از هم کم می‌کنیم تا معادله‌ی جدیدی فاقد اعداد متناوب ساخته شود جواب این معادله کسر مولد آن عدد اعشاری است.

مثال ۲۵ : کسر مولد عدد $\circ/\overline{۱۵}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$x = \circ/\overline{۱۵}$$

$$\underline{۱\circ\circ x = ۱۵/\overline{۱۵}}$$

$$۱\circ\circ x - x = ۱۵/\overline{۱۵} - \circ/\overline{۱۵}$$

$$۹۹x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۹۹} = \frac{۵}{۳۳}$$

مثال ۲۶ : کسر مولد عدد $\text{۵/}\overline{\text{۰۰۵}}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$x = \text{۵/}\overline{\text{۰۰۵}}$$
$$\underline{\text{۱۰۰۰}x = \text{۵۰۰۵/}\overline{\text{۰۰۵}}}$$
$$\text{۱۰۰۰}x - x = \text{۵۰۰۵/}\overline{\text{۰۰۵}} - \text{۵/}\overline{\text{۰۰۵}}$$
$$\text{۹۹۹}x = \text{۵۰۰۰} \Rightarrow x = \frac{\text{۵۰۰۰}}{\text{۹۹۹}}$$

مثال ۲۷ : نشان دهید $\text{۷/}\overline{\text{۹}} = \text{۸}$.

حل:

$$x = \text{۷/}\overline{\text{۹}}$$
$$\underline{\text{۱۰}x = \text{۷۹/}\overline{\text{۹}}}$$
$$\text{۱۰}x - x = \text{۷۹/}\overline{\text{۹}} - \text{۷/}\overline{\text{۹}}$$
$$\text{۹}x = \text{۷۲} \Rightarrow x = \frac{\text{۷۲}}{\text{۹}} = \text{۸}$$

۳- تبدیل نماد اعشاری متناوب مرکب به کسر متعارفی:

برای تبدیل نماداعشاری متناوب مرکب به کسر متعارفی ابتدا عدد را مساوی x قرار داده، سپس با درنظرگرفتن ارقامی که بعد از ممیز آمده ولی تکرار نمی‌شوند (دوره‌ی غیرگردش)، دو طرف معادله را در اعداد ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا ... ضرب می‌کنیم تا عدد اعشاری متناوب مرکب به عدد اعشاری متناوب ساده تبدیل شود. سپس مانند تبدیل اعداد اعشاری متناوب ساده به نماد متعارفی عمل می‌کنیم.

مثال ۲۸ : نماد متعارفی عدد $\text{۰/۵۲}\overline{\text{۴}}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$x = ۰/۵۲\overline{۴}$$
$$۱۰۰x = ۵۲/\overline{۴}$$
$$۱۰۰۰x = ۵۲۴/\overline{۴}$$
$$۱۰۰۰x - ۱۰۰x = ۵۲۴/\overline{۴} - ۵۲/\overline{۴}$$
$$۹۰۰x = ۴۷۲ \rightarrow x = \frac{۴۷۲}{۹۰۰} = \frac{۱۱۸}{۲۲۵}$$

مثال ۲۹ : کسر مولد عدد $۲/۰\overline{۲۹}$ را پیدا کنید.

حل:

$$x = ۲/۰\overline{۲۹}$$
$$۱۰x = ۲۰/\overline{۲۹}$$
$$۱۰۰۰x = ۲۰۲۹/\overline{۲۹}$$
$$۱۰۰۰x - ۱۰x = ۲۰۲۹/\overline{۲۹} - ۲۰/\overline{۲۹}$$
$$۹۹۰x = ۲۰۰۹ \Rightarrow x = \frac{۲۰۰۹}{۹۹۰}$$

☆ راه حل تستی برای تبدیل نماد اعشاری به کسر متعارفی

اگر نماد اعشاری، متناوب ساده باشد، ارقام دوره‌ی گردش را در صورت کسر نوشته و در مخرج به تعداد ارقام دوره‌ی گردش ۹ می‌گذاریم.

مثال ۳۰ :

$$۰/\overline{۰۰۵} = \frac{۵}{۹۹۹} \qquad ۰/\overline{۱۳} = \frac{۱۳}{۹۹}$$

$$۴/\overline{۹} = ۴\frac{۹}{۹} = ۵ \qquad ۲/\overline{۴} = ۲\frac{۴}{۹} = \frac{۲۲}{۹}$$

اگر نماد اعشاری، متناوب مرکب باشد، به این ترتیب عمل می‌کنیم که در صورت تمام ارقام بعد از ممیز را منهای ارقام غیرگردش می‌کنیم و در مخرج به تعداد ارقام دوره‌ی گردش ۹ و به تعداد ارقام غیرگردش صفر قرار می‌دهیم.

مثال ۳۱ :

$$۰/۱۵\overline{۳} = \frac{۱۵۳-۱۵}{۹۰۰} = \frac{۱۳۸}{۹۰۰} \qquad ۰/۲\overline{۵} = \frac{۲۵-۲}{۹۰} = \frac{۲۳}{۹۰}$$

$$۰/۰۰۰\overline{۵} = \frac{۵-۰}{۹۰۰۰} = \frac{۵}{۹۰۰۰} = \frac{۱}{۱۸۰۰} \qquad ۷/۱\overline{۲۳} = ۷\frac{۱۲۳-۱}{۹۹۰} = ۷\frac{۱۲۲}{۹۹۰} = \frac{۷۰۵۲}{۹۹۰}$$

مثال ۳۲ : اگر $۰/\overline{۵a} = \frac{b}{۱۱}$ اعداد طبیعی a و b را به‌دست آورید.

حل:

$$۰/\overline{۵a} = \frac{\overline{۵a}}{۹۹} = \frac{b}{۱۱} \Rightarrow \overline{۵a} \times ۱۱ = ۹۹b \Rightarrow \overline{۵a} = ۹b$$

تنها مضرب دو رقمی ۹ که رقم دهگانش ۵ باشد، $۵۴ = ۹ \times ۶$ است. لذا:

$b = ۶$ و $a = ۴$

مثال ۳۳ : رقم هفتادم نماد اعشاری عدد $\frac{۱}{۷}$ چیست؟

حل:

$$\frac{۱}{۷} = ۰/\overline{۱۴۲۸۵۷}$$

با توجه به این‌که دوره‌ی گردش شش رقمی است، خواهیم داشت: $۷۰ = ۶ \times ۱۱ + ۴$

چهارمین رقم دوره‌ی تناوب ۸ است. بنابراین هفتادمین رقم نیز ۸ است.

اعداد اعشاری ...۰/۱۲۳۴۵ و ...۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰ را درنظر بگیرید. علی‌رغم این‌که این اعداد حالتی موزون دارند اما نمی‌توان کسری مانند $\frac{a}{b}$ به هریک از آن‌ها نظیر کرد. از این نوع اعداد به وفور یافت می‌شود و چون نمی‌توان نماد متعارفی آن‌ها را تعیین کرد آن‌ها را گنگ یا اصم می‌نامند. مجموعه‌ی اعداد گنگ را با Q' نشان می‌دهیم.

به‌طور کلی اگر عددی اعشاری یافت شود که تعداد ارقام اعشاری آن نامتناهی بوده و نتوان به‌صورت عددی گویا نشان داد آن‌را یک عدد اصم نامند. در اثبات گنگ بودن یک عدد حقیقی معمولاً از روش برهان خلف استفاده می‌شود.

به این صورت که فرض می‌کنند عدد موردنظر گویا باشد (فرض خلف) و از آن‌جا به یک تناقض می‌رسند.

مثال ۳۴ : ثابت کنید $\sqrt{۲}$ اصم است.

حل:

فرض کنیم $\sqrt{۲}$ گویا باشد. (فرض خلف) و $\frac{a}{b}$ صورت تحویل‌ناپذیر $\sqrt{۲}$ باشد. یعنی $\sqrt{۲}=\frac{a}{b}$ و $(a,b)=۱$ خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b}=\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{a^۲}{b^۲}=۲\Rightarrow a^۲=۲b^۲$$

سمت راست تساوی اخیر عددی زوج است. پس سمت چپ نیز باید زوج باشد. چون a عدد صحیح است برای زوج بودن $a^۲$ لازم است که a نیز زوج باشد. لذا عددی صحیح مانند k یافت می‌شود که $a=۲k$.

$$(۲k)^۲=۲b^۲\Rightarrow ۴k^۲=۲b^۲\Rightarrow ۲k^۲=b^۲$$

با استدلال مشابه به این نتیجه می‌رسیم که b نیز زوج است و این با $(a,b)=۱$ تناقض دارد. پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت. یعنی $\sqrt{۲}$ اصم است.

مثال ۳۵ : ثابت کنید جمع هر عدد گویا و هر عدد اصم عددی اصم است.

حل:

فرض کنیم $a\in Q$ و $b\in Q'$ ولی $a+b\in Q$. (فرض خلف) پس عضوی از Q مانند c یافت می‌شود که $a+b=c$ و از آن‌جا $b=c-a$، طرف دوم تساوی اخیر عددی گویا و طرف اول آن عددی اصم است. این یک تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و حکم ثابت.

قضیه: ثابت کنید حاصل‌ضرب هر عدد گنگ در هر عدد گویای غیرصفر عددی گنگ است.

اثبات: فرض می‌کنیم $a\in Q$ و $a\neq ۰$ و $b\in Q'$. همچنین فرض می‌کنیم $ab=c$ و $c\in Q$ (فرض خلف) و از آن‌جا خواهیم داشت $b=\frac{c}{a}=c\times\frac{۱}{a}$. با توجه به این‌که a عددی گویا و مخالف صفر است، می‌توان گفت $\frac{۱}{a}$ نیز گویاست. لذا $c\times\frac{۱}{a}$ نیز گویاست. پس b نیز گویاست که تناقض است. بنابراین فرض $c\in Q$ باطل و حکم ثابت است.

قضیه: ثابت کنید معکوس هر عدد گنگ عددی گنگ است.

اثبات: فرض می‌کنیم a عددی گنگ است و نشان می‌دهیم $\frac{1}{a}$ نیز گنگ است. فرض می‌کنیم $\frac{1}{a}$ گویا باشد. در این صورت باید a عددی گویا و مخالف صفر باشد که با فرض قضیه تناقض دارد.

پس $\frac{1}{a}$ گنگ است.

مثال ۳۶ : ثابت کنید قرینه‌ی هر عدد اصم عددی اصم است.

حل:

فرض کنیم $a \in Q'$ ولی $-a \in Q$ (فرض خلف). پس عضوی از Q مانند b هست که $-a = b$ و از آن‌جا $a = -b$. این نشان می‌دهد که a گویاست که با فرض اصم بودن a تناقض دارد.

مثال ۳۷ : نشان دهید Q' نسبت به هیچ‌یک از چهار عمل اصلی بسته نیست.

حل:

با اختیار $\sqrt{2} \in Q'$ داریم:

الف) $-\sqrt{2} \in Q'$ و $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q' \Rightarrow$ Q' نسبت به جمع بسته نیست.

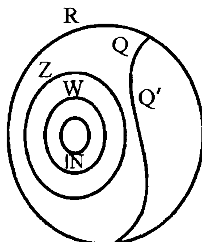
ب) $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \notin Q' \Rightarrow$ Q' نسبت به تفریق بسته نیست.

ج) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \notin Q' \Rightarrow$ Q' نسبت به ضرب بسته نیست.

د) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \notin Q' \Rightarrow$ Q' نسبت به تقسیم بسته نیست.

☆ مجموعه‌ی اعداد حقیقی

مجموعه‌ی متشکل از اعداد گویا و گنگ را مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامیده و آن‌را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم. به‌طور کلی می‌توان گفت هر عدد حقیقی یا گویاست یا گنگ. هم‌چنین مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد گنگ هیچ عضو مشترکی ندارند.



اصول موضوعه‌ی اعداد حقیقی

به ازای هر a و b و c از مجموعه‌ی اعداد حقیقی ویژگی‌های زیر درست می‌باشند.

۱) خاصیت جابه‌جایی برای جمع و ضرب

$$a+b=b+a$$
$$a\times b=b\times a$$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری برای جمع و ضرب

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

۳) وجود عضو خنثی برای جمع و ضرب

$$a+0=0+a=a$$
$$a\times 1=1\times a=a$$

۴) وجود عضو متقابل برای جمع و ضرب

قرینه $a+(-a)=(-a)+a=0$

معکوس $a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$

۵) خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$

نکته: به دو طرف یک تساوی می‌توان یک مقدار معین اضافه کرد. $a=b\Rightarrow a+c=b+c$

نکته: از دو طرف یک تساوی می‌توان یک مقدار معین کم کرد. $a=b\Rightarrow a-c=b-c$

نکته: دو طرف یک تساوی را می‌توان در یک عدد ضرب کرد. $a=b\Rightarrow a\times c=b\times c$

نکته: دو طرف یک تساوی را می‌توان بر یک عدد غیرصفر تقسیم کرد.

$$a=b\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{c} \qquad (c\neq 0)$$

نکته: قرینه‌ی قرینه‌ی یک عدد با خود عدد مساوی است. $-(-a)=a$

نکته: وارون وارون یک عدد با خود عدد مساوی است. $\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$

تمرین‌های فصل اول

۱. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $۱۷ - ۴ \times ۳^{۲} - ۷ - ۵(۳ - ۴)^{۷} \times (-۲)$

ب) $(-۳)(-۵)^{۲} - (-۲)(-۴)^{۲}(-۶)$

ج) $۹ - ۹\left[۵ - ۵(۴ - ۵)^{۷} \times (-۲)\right] \times (-۳)$

د) $۹ - ۳\left(۸ - ۴(۵ - ۹(۲ - ۵))\right) \times (-۶)$

هـ) $۱۱ - ۱۴ + ۱۷ - ۲۰ + ۲۳ - ۲۶ + \dots + ۱۲۵ - ۱۲۸$

و) $(۲ - ۶)(۳ - ۷)(۴ - ۸)\dots(۹۱ - ۹۵)$

۲. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + \dots + ۷۵$

ب) $(-۳۰) + (-۲۵) + (-۲۰) + \dots + ۷۰$

ج) $(۷ \times ۱ + ۳) + (۷ \times ۲ + ۳) + (۷ \times ۳ + ۳) + \dots + (۷ \times ۵۰ + ۳)$

د) $۲^{۱۵} + ۲^{۱۶} + ۲^{۱۷} + \dots + ۲^{۳۰}$

هـ) $۳ + ۳^{۲} + ۳^{۳} + \dots + ۳^{۲۰}$

و) $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{۱۲۸}$

۳. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۷}{۳۶} - \frac{۵}{۲۴} - \frac{۱}{۷۲}$

ب) $\frac{۱۳}{۳۴} - \frac{-۷}{۵۱} - \frac{۵}{۱۷}$

ج) $\frac{۱۳}{۲۸} - \frac{۲۱}{۵۸} \times \frac{-۲۹}{۳۵}$

د) $\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۸}\left(\frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}\right)\right)$

هـ) $7\frac{1}{7}+7\frac{2}{7}+7\frac{3}{7}+\dots+7\frac{20}{7}$

و) $\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{12}\right)\dots\left(1+\frac{1}{50}\right)$

۴. ثابت کنید مجموع دو عدد صحیح فرد عددی فرد است.

۵. ثابت کنید مجذور یک عدد فرد عددی فرد است و بالعکس.

۶. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{2}{7\times 9}+\frac{2}{9\times 11}+\frac{2}{11\times 13}+\dots+\frac{2}{33\times 35}$

ب) $\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\frac{1}{10\times 13}+\dots+\frac{1}{61\times 64}$

ج) $\frac{3}{11\times 16}+\frac{3}{16\times 21}+\frac{3}{21\times 26}+\dots+\frac{3}{46\times 51}$

د) $\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\dots+\frac{1}{399}$

۷. حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\dots+\frac{1}{1+2+3+\dots+40}$

ب) $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\dots$

$+\left(\frac{1}{50}+\frac{2}{50}+\frac{3}{50}+\dots+\frac{49}{50}\right)$

۸. اگر $a_1=1$ و $a_2=1+2$ و $a_3=1+2+3$ و $a_{20}=1+2+3+\dots+20$ باشد، حاصل $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{20}$ را به‌دست آورید.

۹. حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+\frac{29}{30!}$

۱۰. حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

$$۲+\cfrac{۳}{۳+\cfrac{۴}{۱+\cfrac{۵}{۱+۵}}}$$

۱۱. اعداد زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید:

$$A=۲۰۰۵+\frac{۱}{۲۰۰۵} \qquad B=۲۰۰۵+\cfrac{۱}{۲۰۰۵+\cfrac{۱}{۲۰۰۵}}$$

$$c=۲۰۰۵+\cfrac{۱}{۲۰۰۵+\cfrac{۱}{۲۰۰۵+\cfrac{۱}{۲۰۰۵}}}$$

۱۲. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۸۱}+\frac{۱}{۸۲}+\frac{۱}{۸۳}+\ldots+\frac{۱}{۱۰۰}>\frac{۱}{۵}$$

۱۳. ثابت کنید:

$$\left(\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۵}+\frac{۶}{۷}+\ldots+\frac{۹۰}{۹۱}\right)+\left(\frac{۳}{۲}+\frac{۵}{۴}+\frac{۷}{۶}+\ldots+\frac{۹۱}{۹۰}\right)>۹۰$$

۱۴. ثابت کنید:

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{۱۹۹}-\frac{۱}{۲۰۰}=\frac{۱}{۱۰۱}+\frac{۱}{۱۰۲}+\ldots+\frac{۱}{۲۰۰}$$

۱۵. کسری مساوی $\frac{۳۵}{۷۷}$ پیدا کنید که تفاضل صورت و مخرج آن ۱۷۴ باشد.

۱۶. کوچک‌ترین عدد طبیعی که اگر آن‌را بر $\frac{۹}{۱۰}$ و $\frac{۱۲}{۲۵}$ و $\frac{۱۸}{۳۵}$ تقسیم کنیم، خارج قسمت‌ها اعدادی طبیعی باشند، چیست؟

۱۷. نادر $\frac{۲}{۷}$ پول خود را کتاب، $\frac{۱}{۵}$ بقیه‌ی پول را دفتر خرید. سپس نصف باقی‌مانده‌ی پولش را به خواهرش داد و ۱۴۰۰۰ ریال برایش باقی ماند. کل پول نادر چه‌قدر است؟

۱۸. فواره‌ی A حوضی را در ۸ ساعت، فواره‌ی B حوض را در ۴ ساعت پر می‌کنند. اگر سه فواره‌ی A، B و C با هم حوض را در ۲ ساعت پر کنند، معین کنید فواره‌ی C به تنهایی در چند ساعت حوض را پر می‌کنند؟

۱۹. نماد اعشاری کسرهای $\frac{۵}{۸}$، $\frac{۷}{۳}$ و $\frac{۸}{۱۵}$ را نوشته و معین کنید. نماد اعشاری عدد از چه نوعی است؟

۲۰. اعداد زیر را به‌صورت نماد متعارفی بنویسید.

الف) $۰/۰۰۰۷$

ب) $۲/\overline{۱۷۴}$

ج) $۲/۱\overline{۷۴}$

د) $۹۹/\overline{۹}$

هـ) $۱/۳۵\overline{۷}$

و) $۰/۰۰۰\overline{۹}$

۲۱. دهمین رقم نماد اعشاری $\frac{۲۵۰۱}{۲۲۵۰۰}$ چیست؟

۲۲. در کسر $۱ > \frac{۴a}{۵۵} > ۰$ مقادیر $a \in N$ را چنان تعیین کنید که کسر حاصل مولد:

الف) یک عدد اعشاری تحقیقی باشد.

ب) یک عدد اعشاری متناوب ساده باشد.

ج) یک عدد اعشاری متناوب مرکب باشد.

۲۳. چند عدد طبیعی مانند a می‌توان یافت، به طوری‌که به ازای آن‌ها کسر کوچک‌تر از واحد $\frac{a}{۳۱۵}$ مولد یک عدد اعشاری متناوب ساده باشد؟

۲۴. چند عدد طبیعی مانند a می‌توان یافت به طوری‌که به ازای آن‌ها کسر کوچک‌تر از واحد $\frac{a}{۱۰۵}$ مولد یک عدد اعشاری متناوب مرکب باشد.

۲۵. هر دسته از اعداد زیر را با هم مقایسه کنید:

الف) $۰/\overline{۵}$ و $۰/۲\overline{۵}$ ب) $۰/۲\overline{۵}$ و $۰/\overline{۲۵}$

۲۶. اگر $\frac{b}{۱۱} = ۰/\overline{۶a}$، a و b را حساب کنید.

۲۷. n عدد گویا بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ ارائه دهید.

۲۸. اگر $\frac{a}{b} = ۰/\overline{۳۶}$ و $(a, b) = ۱$، حاصل $a + b$ چه‌قدر است؟

۲۹. چهل و هفتمین رقم نماد اعشاری $\frac{۴۱}{۳۳۳}$ چیست؟

۳۰. کسرهای $\frac{a}{b}$ و $\frac{a+۱}{b+۱}$ را با هم مقایسه کنید.

۳۱. عدد طبیعی a را چنان تعیین کنید که $۰/۵۸\overline{۳}$ با کسر تحویل‌ناپذیر $\frac{۳a+۴}{۵a+۷}$ برابر باشد.

۳۲. کسر متعارفی $\frac{b(b+۱)}{b^{۲}+۷} < ۱$ $(b \in N)$ را درنظر بگیرید.

اولاً: همه‌ی مقادیر ممکن b را مشخص کنید.

ثانیاً: به ازای هر مقدار b نوع عدد اعشاری را که از کسر فوق تولید می‌شود، مشخص کنید.

۳۳. کسر $\frac{r}{۴۸}$ تحویل‌ناپذیر است. $\frac{r}{۴۸}$ مولد چه نوع عدد اعشاری می‌باشد؟

۳۴. اگر کسر $\frac{n}{۷۲} < ۱$ $(n \in N)$ مولد عدد اعشاری متناوب ساده باشد، مقادیر n را به‌دست آورید.

۳۵. اگر $\frac{۵۲}{۱۱} = ۴/\overline{a۲}$ باشد، a را تعیین کنید.

۳۶. اگر $a \in N$، مقادیر a را چنان تعیین کنید که کسر کوچک‌تر از واحد $\frac{a}{۷۰}$:

اولاً: مولد نماد اعشاری تحقیقی باشد.

ثانیاً: مولد نماد اعشاری متناوب ساده باشد.

ثالثاً: مولد نماد اعشاری متناوب مرکب باشد.

۳۷. ثابت کنید:

$$N/a_۱a_۲...a_k = N/a_۱a_۲...(a_k - ۱)\overline{۹}$$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳۸. نماد متعارفی دو عدد $۰/\overline{۶۱}$ و $۰/\overline{۶}$ را بنویسید و بین آن‌ها سه عدد گویا به‌دست آورید.

۳۹. کسر متعارفی مولد عدد اعشاری $A = ۲/\overline{۳} \times ۰/\overline{۲۳}$ را بنویسید.

۴۰. کسر متعارفی مولد عدد اعشاری عدد $A = ۰/۱\overline{۵۳} + ۰/۱۵\overline{۳}$ را بنویسید.

۴۱. مطلوبست تمام کسرهایی که صورتشان از ۲۰۰ کوچک‌تر و مخرجشان از ۳۰۰ بزرگ‌تر بوده و مساوی $\frac{۵۷}{۱۳۳}$ باشند.

۴۲. اعداد $\sqrt{۵}$ و $-\sqrt{۱۰}$ و $۱ + \sqrt{۳}$ و $۱ - \sqrt{۱۰}$ را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

۴۳. ثابت کنید $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

۴۴. ثابت کنید $\sqrt{۳} + \sqrt{۲}$ عددی گنگ است. (فقط از فرض $\sqrt{۲}$ گنگ است استفاده کنید.)

فصل دوم

مجموعه

دسته‌ای از اشیای کاملاً مشخص را مجموعه گویند. مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی A، B و C و ... نام‌گذاری می‌کنند. اعداد طبیعی کوچک‌تر از صد، اعداد صحیح بزرگ‌تر از ۱۰-، مضارب صحیح عدد ۳ مثال‌هایی از مجموعه هستند.

$A = \{۱,۲,۳,...,۹۹\}$

$B = \{-۹,-۸,-۷,...\}$

$C = \{...,-۶,-۳,۰,۳,۶,...\}$

عناصری که یک مجموعه را تشکیل می‌دهند اعضای مجموعه نامیده می‌شوند. اگر a عضوی از مجموعه‌ی A باشد آن‌را به‌صورت $a \in A$ و اگر b به مجموعه‌ی A تعلق نداشته باشد، آن‌را به‌صورت $b \notin A$ نشان می‌دهند.

مثال ۱ : کدام‌یک از دسته‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کنند؟

الف) اعداد طبیعی بزرگ‌تر از هزار

ب) اعداد خیلی بزرگ

ج) چهار عدد فرد متوالی

د) مقسوم‌علیه‌های عدد سی

حل:

اعداد طبیعی بزرگ‌تر از هزار و مقسوم‌علیه‌های عدد سی کاملاً مشخص می‌باشند. لذا هر کدام یک مجموعه را معرفی می‌کنند. اما اعداد خیلی بزرگ و چهار عدد فرد متوالی مشخص نیستند و مجموعه‌ای را نیز مشخص نمی‌سازند.

مثال ۲ : اگر $A=\{۱,\{۱\},\{۲\},\{۲,۳\}\}$ کدام‌یک از عبارات زیر درست است؟

الف) $۱\in A$ ب) $۲\in A$

ج) $\{۲\}\in A$ د) $۳\notin A$

هـ) $\{۳\}\in A$ و) $\{۲,۳\}\in A$

حل:

قسمت‌های الف و ج و د درست و بقیه نادرست می‌باشند.

مثال ۳ : یک مجموعه‌ی سه عضوی بسازید که از هر دو عضو آن یکی عضو دیگری باشد.

حل:

$$\{۵,\{۵\},\{۵,\{۵\}\}\}$$

☆ مجموعه‌ی تهی

مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد مجموعه‌ی تهی نامیده می‌شود. مجموعه‌ی تهی را با نماد $\{\ \}$ یا $\varnothing$ نشان می‌دهند.

مثال ۴ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۷ و ۸ مجموعه‌ی اعداد طبیعی منفی و مجموعه‌ی اعداد صحیح که مجذورشان منفی است، مثال‌هایی از مجموعه‌ی تهی هستند.

مثال ۵ : مجموعه‌ی $A=\{\{۵,۱۰,۱۵,...,۱۰۰\}\}$ چند عضو دارد؟

حل:

مجموعه‌ی A یک مجموعه‌ی تک‌عضوی است.

☆ صورت‌های مختلف نمایش یک مجموعه

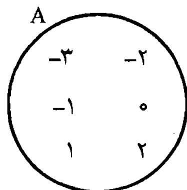
هر مجموعه را می‌توان به سه صورت نمایش داد:

۱) نمایش هندسی (نمودار ون)

۲) نمایش تفصیلی (با عضوها)

۳) نمایش توصیفی (با علائم ریاضی)

نمایش هندسی مجموعه به این ترتیب است که اعضای مجموعه را درون منحنی بسته‌ای قرار می‌دهند.



در روش تفصیلی اعضای مجموعه را به‌طور کامل داخل آکلاد قرار می‌دهند.

$$A=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

صورت توصیفی مجموعه به این ترتیب است که یک متغیر را به عنوان نماینده‌ی اعضای مجموعه اختیار می‌کنیم و اعضای مجموعه را با توصیفی به آن متغیر نسبت می‌دهیم.

$$A=\{x\,|x\in\mathbb{Z}\,,-۳\le x\le ۲\}$$

مثال ۶ : مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۲۵ را با عضوها و علائم ریاضی مشخص کنید.

حل:

$$\{-۲۵,-۵,-۱,۱,۵,۲۵\}$$

$$\left\{x\,\middle|x\in\mathbb{Z}\,,\frac{۲۵}{x}\in\mathbb{Z}\right\}$$

نکته: مجموعه‌ی اعداد طبیعی، اعداد حسابی، اعداد صحیح، اعداد زوج طبیعی و اعداد فرد طبیعی را به‌ترتیب با حروف N، W، Z، E و O نشان می‌دهند.

$$N=\{۱,۲,۳,...\}$$
$$W=\{۰,۱,۲,۳,...\}$$
$$Z=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$$
$$E=\{۲,۴,۶,...\}$$
$$O=\{۱,۳,۵,۷,...\}$$

مثال ۷ : مجموعه‌ی اعداد صحیح یک رقمی را با عضوها و علائم ریاضی مشخص کنید.

حل:

$$A=\{-۹,-۸,-۷,...,۹\}$$
$$=\{x\,|x\in\mathbb{Z},-۹\le x\le ۹\}$$

مثال ۸ : مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج یک رقمی را با عضوها و علائم ریاضی مشخص کنید.

حل:

$$B=\{-۸,-۶,-۴,\dots,۸\}$$
$$=\{x \mid x=۲k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ ,\ -۴\le k\le ۴\}$$
$$=\{۲k \mid k\in\mathbb{Z}\ ,\ -۴\le k\le ۴\}$$

مثال ۹ : مجموعه‌ی مضارب صحیح ۳ را با عضوها و علائم ریاضی نشان دهید.

حل:

$$C=\{\dots,-۹,-۶,-۳,۰,۳,۶,۹,\dots\}$$
$$=\{۳k \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

مثال ۱۰ : مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید:

$$A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ x>-۷\} \qquad B=\{x \mid x=۲k\ ,\ k\in Z\}$$
$$C=\{x \mid x=۲k+۱\ ,\ k\in\mathbb{Z}\} \qquad D=\{x \mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ x^{۲}\le ۱۶\}$$
$$E=\{x \mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ \sqrt{-x}\in\mathbb{Z}\} \qquad F=\{۲^{x} \mid x\in N\}$$

حل:

$$A=\{-۶,-۵,-۴,\dots\}$$
$$B=\{\dots,-۴,-۲,۰,۲,۴,\dots\}$$
$$C=\{\dots,-۵,-۳,-۱,۱,۳,۵,\dots\}$$
$$D=\{-۴,-۳,-۲,\dots,۴\}$$
$$E=\{۰,-۱,-۴,-۹,\dots\}$$
$$F=\{۲,۴,۸,۱۶,\dots\}$$

مثال ۱۱ : هریک از مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی مشخص کنید.

$$A=\{۲,۵,۸,۱۱,\dots,۹۸\} \qquad B=\{۰,۱,۳,۷,\dots\}$$
$$C=\{\dots,-۱۵,-۵,۵,۱۵,۲۵,\dots\} \qquad D=\left\{\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},۱,\dots\right\}$$
$$E=\{۹,۹۹,۹۹۹,\dots\} \qquad F=\{۲,۱۱,۱۰۱,۱۰۰۱,\dots\}$$

حل:

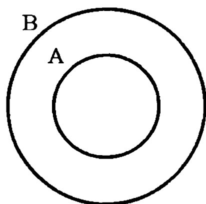
$A=\{۳k-۱|k\in\mathbb{N}, k\le ۳۳\}$ $B=\{۲^x-۱|x\in W\}$

$C=\{۱۰k-۵|k\in\mathbb{Z}\}$ $D=\{۲^x|x\in\mathbb{Z}, x\ge -۳\}$

$E=\{۱۰^x-۱|x\in \mathbf{N}\}$ $F=\{۱۰^x+۱|x\in W\}$

☆ زیرمجموعه

مجموعه‌ی A را زیر مجموعه‌ی B گویند، در صورتی‌که تمام عضوهای A در B باشد و آن‌را با نماد $A\subset B$ نشان می‌دهند.



به عنوان مثال اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ آن‌گاه $A\subset B$.

مثال ۱۲ : اگر $A=\{x|x\in z \ , x<-۱۷\}$ و $B=\{x|x\in z \ , x<-۷\}$ کدام‌یک از این دو مجموعه، زیرمجموعه‌ی دیگری است؟

حل:

$A=\{-۱۸,-۱۹,-۲۰,...\}$ $B=\{-۸,-۹,-۱۰,...\}$

تمام اعضای A در B نیز وجود دارد. پس: $A\subset B$

مثال ۱۳ : اگر A مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۴۸ و B مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۲۴ باشد، کدام‌یک از این دو مجموعه زیرمجموعه‌ی دیگری است؟

حل:

با توجه به این‌که ۴۸ بر ۲۴ بخش‌پذیر است می‌توان گفت هر مقسوم‌علیه ۲۴، مقسوم‌علیه ۴۸ نیز می‌باشد. پس: $B\subset A$

مثال ۱۴ : اگر C مجموعه‌ی مضارب عدد ۱۸ و D مجموعه‌ی مضارب عدد ۹ باشد، کدام‌یک از این دو مجموعه زیرمجموعه‌ی دیگری است؟

حل:

تمام مضارب عدد ۱۸، مضارب عدد ۹ نیز می‌باشند. پس $C\subset D$.

نکته: $\varnothing$ زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها است.

نکته: هر مجموعه‌ای زیر مجموعه‌ی خودش است.

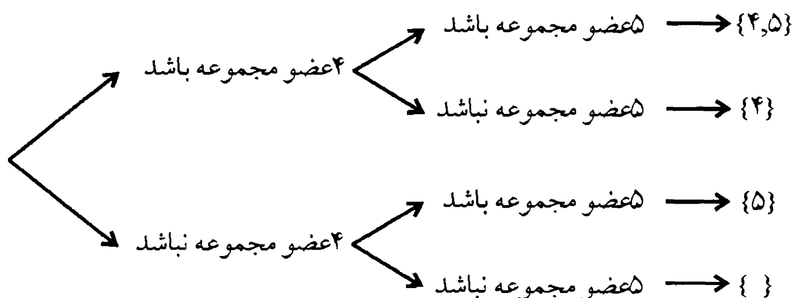
نکته: مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی B نیست، در صورتی‌که لااقل یک عضو A در B نباشد که آن‌را به‌صورت $A \not\subset B$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد اول زیرمجموعه‌ی اعداد فرد نیست زیرا عدد ۲ در مجموعه‌ی اعداد اول هست ولی در مجموعه‌ی اعداد فرد نیست.

مثال ۱۵ : همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{۴,۵\}$ را بنویسید. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

حل:

می‌خواهیم مجموعه‌هایی بسازیم که تمام اعضای آن در A باشند. با توجه به این‌که عدد ۴ یا ۵ عضو مجموعه باشند یا نباشند می‌توان حالت‌های زیر را درنظر گرفت:



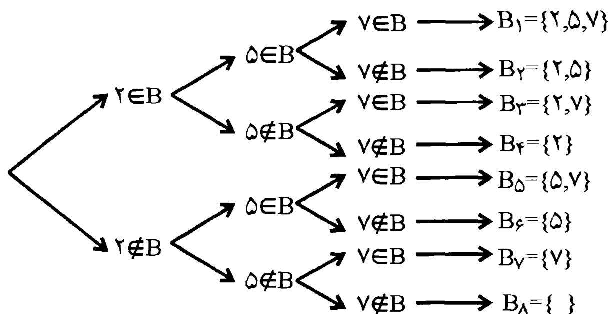
عدد ۴ عضو مجموعه باشد یا نباشد ۲ حالت پدید می‌آورد. به همین ترتیب ۵ عضو مجموعه باشد یا نباشد نیز ۲ حالت پدید می‌آورد. پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A برابر است با:

$۲ \times ۲ = ۲^۲$

مثال ۱۶ : همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{۲,۵,۷\}$ را بنویسید. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

حل:

فرض می‌کنیم B زیرمجموعه‌ای از A باشد. حالت‌های زیر را می‌توان برای اعضای B درنظر گرفت:



بودن و نبودن عدد دو در مجموعه‌ی B، ۲ حالت، بودن و نبودن عدد ۵ در مجموعه‌ی B، ۲ حالت و بودن و نبودن عدد ۷ در مجموعه‌ی B نیز ۲ حالت پدید می‌آورد، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌ها برابر است با: $۲\times۲\times۲=۲^{۳}=۸$

☆ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با:

$$\underbrace{۲\times۲\times۲\times\ldots\times۲}_{n}=۲^{n}$$

مثال ۱۷ : همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $B=\{۹,\{۹\},\{۷\}\}$ را بنویسید.

حل:

$$\varnothing\ ,\ \{۹\}\ ,\ \{\{۹\}\}\ ,\ \{\{۷\}\}\ ,\ \{۹,\{۹\}\}\ ,\ \{۹,\{۷\}\}\ ,\ \{\{۹\},\{۷\}\},\{۹,\{۹\},\{۷\}\}$$

مثال ۱۸ : اگر $A=\{\varnothing\ ,\ \{\varnothing\},\{۲,۵\},۵\}$ کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) $\varnothing\in A$ ب) $\varnothing\subset A$ ج) $\{\varnothing\}\subset A$ د) $\{\varnothing\}\in A$

هـ) $\{\{\varnothing\}\}\subset A$ و) $\{۲\}\in A$ ز) $\{۲\}\subset A$ ح) $\{۵\}\in A$

ط) $\{۵\}\subset A$ ی) $\{\varnothing,\{۵\}\}\subset A$ ک) $\{\varnothing,۲\}\subset A$ ل) $A\subset A$

حل:

موارد الف، ب، ج، د، هـ، ط و ل درست و سایر موارد نادرست می‌باشند.

مثال ۱۹ : یک مجموعه‌ی سه عضوی بسازید که از هر دو عضو آن یکی زیرمجموعه‌ی دیگری باشد.

حل:

$$A=\{\varnothing,\{۵\},\{۵,۸\}\}$$

مثال ۲۰ : یک مجموعه‌ی ۹ عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

حل:

$$۲^{۹}=۵۱۲$$

مثال ۲۱ : مجموعه‌ی A دارای ۲۰۴۸ زیرمجموعه است. این مجموعه چند عضو دارد؟

حل:

$$۲۰۴۸=۲^{۱۱}\to n(A)=۱۱$$

مثال ۲۲ : تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n+۴$ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n-۱$ عضوی است؟

حل:

$$\frac{۲^{n+۴}}{۲^{n-۱}}=\frac{۲^{n}\times ۲^{۴}}{۲^{n}\times ۲^{-۱}}=۲^{۵}=۳۲$$

مثال ۲۳ : تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $۲n-۵$ عضوی شانزده برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n-۲$ عضوی است. مقدار n چه‌قدر است؟

حل:

$$۲^{۲n-۵}=۱۶\times ۲^{n-۲}\Rightarrow ۲^{۲n-۵}=۲^{۴}\times ۲^{n-۲}$$

$$۲^{۲n-۵}=۲^{n+۲}\Rightarrow ۲n-۵=n+۲\Rightarrow n=۷$$

مثال ۲۴ : تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n+۶$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n+۲$ عضوی ۱۹۲۰ واحد بیش‌تر است. مقدار n چه‌قدر است؟

حل:

$$۲^{n+۶}=۲^{n+۲}+۱۹۲۰ \Rightarrow ۲^{n+۶}-۲^{n+۲}=۱۹۲۰$$

$$۲^{n}\,(۲^{۶}-۲^{۲})=۱۹۲۰ \Rightarrow ۲^{n}\times ۶۰=۱۹۲۰$$

$$۲^{n}=۳۲ \Rightarrow ۲^{n}=۲^{۵} \Rightarrow n=۵$$

مثال ۲۵ : سه مجموعه‌ی $n+۳$ عضوی و $n+۱$ عضوی و $n-۲$ عضوی روی هم ۱۶۴ زیرمجموعه دارند. مقدار n چه‌قدر است؟

حل:

$$۲^{n+۳}+۲^{n+۱}+۲^{n-۲}=۱۶۴ \Rightarrow ۲^{n}\,(۲^{۳}+۲^{۱}+۲^{-۲})=۱۶۴$$

$$۲^{n}\times\frac{۴۱}{۴}=۱۶۴ \Rightarrow ۲^{n}=۱۶۴\times\frac{۴}{۴۱} \Rightarrow ۲^{n}=۱۶ \rightarrow n=۴$$

☆ زیرمجموعه‌ی محض

همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه به جزء خود مجموعه را زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه می‌نامند.

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: $۲^{n}-۱$

مثال ۲۶ : یک مجموعه‌ی ۷ عضوی چند زیرمجموعه‌ی محض دارد؟

حل: $۲^{۷}-۱=۱۲۸-۱=۱۲۷$

مثال ۲۷ : تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی A برابر ۱۰۲۳ است. این مجموعه چند عضوی است؟

حل:

$$۱۰۲۳+۱=۱۰۲۴$$

$$۱۰۲۴=۲^{۱۰} \rightarrow n(A)=۱۰$$

مثال ۲۸ : اگر ۳ عضو به تعداد اعضای یک مجموعه اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن چه تغییری می‌کند؟

حل:

$۲^{n+۳} \div ۲^{n} = ۲^{۳} = ۸$

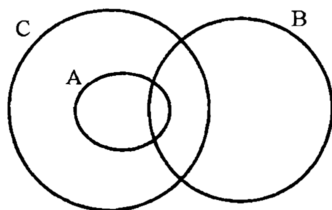
تعداد زیرمجموعه‌ها ۸ برابر می‌شود.

قضیه: ثابت کنید اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ آن‌گاه: $A \subset C$.

برهان: اگر x عضو دلخواهی از مجموعه‌ی A باشد، با توجه به این‌که $A \subset B$ می‌باشد، می‌توان گفت x عضو B نیز هست و از آن‌جایی که $B \subset C$ است، نتیجه می‌شود x عضوی از C نیز هست. بنابراین هر عضو مجموعه‌ی A در C نیز هست، پس: $A \subset C$

$x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$

مثال ۲۹ : اگر $A \not\subset B$ و $B \not\subset C$ آیا می‌توان گفت $A \not\subset C$؟



حل:

خیر

مجموعه‌ی توان یک مجموعه

مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه را مجموعه‌ی توان آن مجموعه می‌نامند. مجموعه‌ی توان مجموعه‌ی A را با $P(A)$ نشان می‌دهند.

مثال ۳۰ : اگر $A = \{۴,\{۴\}\}$ باشد $P(A)$ را مشخص کنید.

حل:

$P(A) = \{\varnothing,\{۴\},\{\{۴\}\},\{۴,\{۴\}\}\}$

مثال ۳۱ : اگر $B = \{\varnothing,\{۰\},\{۰,\varnothing\}\}$ باشد، $P(B)$ را بنویسید.

حل:

$P(B) = \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{۰\}\},\{\{۰,\varnothing\}\},\{\varnothing,\{۰\}\},\{\varnothing,\{۰,\varnothing\}\},\{\{۰\},\{۰,\varnothing\}\},B\}$

مثال ۳۲ : اگر $A = \{۶\}$ باشد، $P(P(A))$ را مشخص کنید.

حل:

$P(A)=\{\varnothing,\{۶\}\}$

$P(P(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{۶\}\},\{\varnothing,\{۶\}\}\}$

مثال ۳۳ : مجموعه‌ی $P\left(P\left(P\left(\varnothing\right)\right)\right)$ را مشخص کنید.

حل:

$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$

$P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

مثال ۳۴ : اگر $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ و $B=\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$ و $A\subset X\subset B$. به‌جای X چند مجموعه می‌توان قرار داد؟

حل:

مجموعه‌ی X مجموعه‌ای است که همه‌ی اعضای مجموعه‌ی A را داراست و عضوهای ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ... و ۲۰ را نیز می‌تواند اختیار کند. بنابراین تعداد مجموعه‌هایی که جای X می‌توانند قرار گیرند، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{۱۱,۱۲,۱۳,...,۲۰\}$ یعنی $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$.

تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی

مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳\}$ را درنظر بگیرید. هر عضو را می‌توان با دو عضو دیگر انتخاب کرد و در یک مجموعه قرار داد.

$\{۳,۱\},\{۳,۲\}$ $\{۲,۱\},\{۲,۳\}$ $\{۱,۲\},\{۱,۳\}$

به این ترتیب سه دسته مجموعه ساخته می‌شود. اما هر مجموعه دو بار نوشته شده است. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی برابر است با:

$$\frac{۳\times۲}{۲}=۳$$

حال مجموعه‌ی n عضوی $A=\{۱,۲,۳,...,n\}$ را درنظر بگیرید. هر عضو این مجموعه را می‌توان با $(n-۱)$ عضو دیگر در یک مجموعه قرار داد که به این ترتیب n دسته زیرمجموعه‌ی دو عضوی نوشته می‌شود که هر دسته شامل $(n-۱)$ مجموعه است. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با:

$$\frac{n(n-۱)}{۲}$$

مثال ۳۵ : یک مجموعه‌ی ۲۰ عضوی چند زیرمجموعه‌ی دو عضوی دارد؟

حل:

$$\frac{۲۰\times(۲۰-۱)}{۲}=\frac{۲۰\times۱۹}{۲}=۱۹۰$$

☆ تساوی دو مجموعه

دو مجموعه‌ی A و B را مساوی گویند، در صورتی‌که هر کدام زیرمجموعه‌ی دیگری باشد. به عنوان مثال دو مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{c,b,b,a,a,a\}$ با هم مساویند.

مثال ۳۶ : اگر $A=\{x-y,\{x\}\}$ و $B=\{\{۷\},۵\}$ باشد، مقادیر x و y را حساب کنید.

حل:

$$\{x\}=\{۷\}\rightarrow x=۷$$
$$x-y=۵\rightarrow ۷-y=۵\rightarrow y=۲$$

مثال ۳۷ : اگر $A=\{\{۳\},\{۳,۳\},\{۳,۳,۳\}\}$ باشد، $P(A)$ را بنویسید.

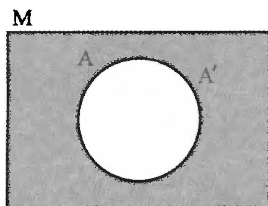
حل:

$$A=\{\{۳\},\{۳,۳\},\{۳,۳,۳\}\}=\{\{۳\},\{۳\},\{۳\}\}=\{\{۳\}\}$$
$$P(A)=\{\varnothing,\{\{۳\}\}\}$$

☆ مجموعه‌ی مرجع

در هر بحث ریاضی مجموعه‌ای که حاوی مجموعه‌های دیگر باشد مجموعه‌ی مرجع نامیده می‌شود. مجموعه‌ی مرجع را با M نشان می‌دهیم.

☆ متمم یک مجموعه



متمم مجموعه‌ی A که آن‌را با A' نشان می‌دهیم مجموعه‌ای است که عضوهای آن در M باشد ولی در A نباشد.

$$A' = \{x \mid x \in M \ , x \notin A\}$$

نکته: هر عضو مجموعه‌ی M یا به A تعلق دارد یا به A'.

نکته: اگر عضوی در A باشد در A' نیست و بالعکس.

مثال ۳۸ : اگر $M = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A = \{۱,۳,۴\}$ باشد، A' را مشخص کنید.

حل:

$$A' = \{۲,۵,۶\}$$

مثال ۳۹ : اگر $M = Z$ و B مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج باشد، آن‌گاه B' مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد می‌باشد.

مثال ۴۰ : اگر $M = \{x \mid x \in Z \ , x < -۹\}$ و $C = \{x \mid x \in Z \ , x < -۲۰\}$ باشد، C' را مشخص کنید.

حل:

$$C' = \{x \mid x \in z \ , x \geq -۲۰\} = \{-۲۰, -۱۹, -۱۸, \ldots, -۱۰\}$$

مثال ۴۱ : اگر M مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۴۸ و D مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۱۶ باشد، D' را مشخص کنید.

حل:

$$M = \{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۱۶,۲۴,۴۸\}$$

$$D = \{۱,۲,۴,۸,۱۶\} \Rightarrow D' = \{۳,۶,۱۲,۲۴,۴۸\}$$

مثال ۴۲ : اگر $M = \{۲k \mid k \in Z\}$ و $A = \{۴k \mid k \in Z\}$ متمم مجموعه‌ی A را با عضوها و با علائم ریاضی نشان دهید.

حل:

$$M = \{\ldots, -۶, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, ۶, \ldots\}$$

$$A = \{\ldots, -۸, -۴, ۰, ۴, ۸, \ldots\}$$

$$A' = \{\ldots, -۱۰, -۶, -۲, ۲; ۶, ۱۰, \ldots\} = \{۴k - ۲ \mid k \in Z\}$$

مثال ۴۳ : اگـــر $M=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ و $A=\{a,b\}$ و $B=\{a,b,c,d\}$ مجموعه‌های A' و B' را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

حل:

$A'=\{c,d,e,f,g\}$ $\quad$ $B'=\{e,f,g\}$

در این مثال $A\subset B$ می‌باشد. اما $A'\not\subset B'$. بلکه $B'\subset A'$.

قضیه: ثابت کنید اگر $A\subset B$ آن‌گاه $B'\subset A'$.

برهان: باید نشان دهیم تمام عضوهای B' در A' نیز می‌باشند. فرض می‌کنیم x عضوی دلخواه و از این به بعد ثابت از B' باشد.

$$x\in B'\Rightarrow x\notin B\xrightarrow{\text{فرض}}x\notin A\Rightarrow x\in A'$$

قضیه: ثابت کنید اگر دو مجموعه مساوی باشند، متمم‌های آن‌ها نیز مساویند.

برهان: فرض می‌کنیم $A=B$ و نشان می‌دهیم: $A'=B'$

$$A=B\Rightarrow(A\subset B\ ,\ B\subset A)\Rightarrow(B'\subset A'\ ,\ A'\subset B')\Rightarrow A'=B'$$

قضیه: ثابت کنید متمم متمم یک مجموعه با خود مجموعه مساوی است.

برهان: $(A')'=\{x\,|\,x\in M\ ,\ x\notin A\}'=\{x\,|\,x\in M\ ,\ x\in A\}=A$

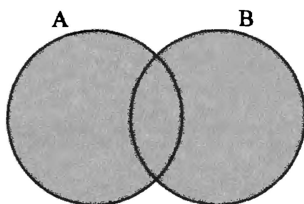
قضیه: ثابت کنید متمم مجموعه‌ی مرجع مجموعه‌ی تهی است.

برهان: $M'=\{x\,|\,x\in M\ ,x\notin M\}=\varnothing$

قضیه: ثابت کنید $\varnothing'=M$.

برهان: $M'=\varnothing\Rightarrow(M')'=\varnothing'\Rightarrow M=\varnothing$

☆ اجتماع دو مجموعه



اجتماع دو مجموعه‌ی A و B که آن‌را با $A \cup B$ نشان می دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن یا در A باشند یا در B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثال ۴۴ : اگر $A = \{۵,۶,۷,۸\}$ و $B = \{۷,۸,۹\}$ مجموعه‌ی $A \cup B$ را مشخص کنید.

✎ **حل:**

$$A \cup B = \{۵,۶,۷,۸,۹\}$$

مثال ۴۵ : اگر $A = \{-۲۵,-۲۴,-۲۳,...,۱۹\}$ و $B = \{-۱۲,-۱۱,-۱۰,...,۴۰\}$ باشد $A \cup B$ را مشخص کنید.

✎ **حل:**

$$A \cup B = \{-۲۵,-۲۴,-۲۳,...,۴۰\}$$

مثال ۴۶ : اگر $C = \{x \mid x \in Z \ , x \geq -۱۵\}$ و $D = \{x \mid x \in Z \ ,x < ۱۳\}$ باشد، $C \cup D$ را مشخص کنید.

✎ **حل:**

$$C \cup D = Z$$

مثال ۴۷ : اگر:

$$E = \{x \mid x \in Z \ ,-۹ < x < ۸\} \text{ و } F = \{x \mid x \in Z \ , -۵ < x < ۱۷\}$$

باشد.

✎ **حل:**

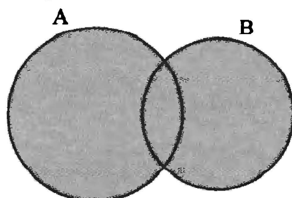
$$E \cup F = \{x \mid x \in Z \ ,-۹ < x < ۱۷\}$$

مثال ۴۸ : اگر $A = \left\{x \mid x \in Z \ , \frac{x}{۲} \in Z\right\}$ و $B = \left\{x \mid x \in Z \ ,\frac{x+۱}{۲} \in Z\right\}$ باشد، $A \cup B$ را مشخص کنید.

حل:

A مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج و B مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد می‌باشد.

$A \bigcup B = Z$



نکته: اگر A و B دو مجموعه باشند، آن‌گاه:

$A \subset A \bigcup B$ و $B \subset A \bigcup B$.

مثال ۴۹ : اگر $A = \{۳,۵,۷\}$ و $B = \{۲,۳,۵,۷,۸\}$، $A \bigcup B$ را مشخص کنید.

حل:

$A \bigcup B = \{۲,۳,۵,۷,۸\} = B$

قضیه: اگر $A \subset B$ باشد، ثابت کنید $A \bigcup B = B$.

برهان: برای این‌که ثابت کنیم $A \bigcup B = B$ کافی است نشان دهیم: $B \subset A \bigcup B$ و $A \bigcup B \subset B$ که رابطه‌ی اول بدیهی است. برای اثبات رابطه‌ی دوم فرض می‌کنیم x عضو دلخواهی از $A \bigcup B$ باشد، در این صورت x یا متعلق به A است یا متعلق به مجموعه‌ی B. اما با توجه به فرض در صورتی‌که x عضو A باشد متعلق به B نیز هست. پس: $A \bigcup B \subset C$

$$\left.\begin{array}{l} B \subset A \bigcup B \\ A \bigcup B \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow A \bigcup B = B$$

قضیه: ثابت کنید اگر $A \bigcup B = B$ آن‌گاه $A \subset B$.

برهان:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset A \bigcup B \\ A \bigcup B = B \end{array}\right\} \Rightarrow A \subset B$$

مثال ۵۰ : ثابت کنید $A \bigcup A = A$.

حل:

$A \subset A \Rightarrow A \bigcup A = A$

مثال ۵۱ : ثابت کنید $A \cup \varnothing = A$.

✎ حل:

$$\varnothing \subset A \Rightarrow A \cup \varnothing = A$$

مثال ۵۲ : ثابت کنید $A \cup M = M$.

✎ حل:

$$A \subset M \Rightarrow A \cup M = M$$

مثال ۵۳ : اگر $M = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A = \{۱,۲,۳\}$ باشد $A \cup A'$ را مشخص کنید.

✎ حل:

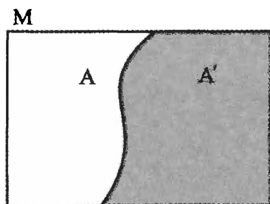
$$A' = \{۴,۵,۶\}$$

$$A \cup A' = \{۱,۲,۳\} \cup \{۴,۵,۶\} = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} = M$$

مثال ۵۴ : با نمودار ون نشان دهید $A \cup A' = M$.

✎ حل:

$$A \cup A' = M$$



مثال ۵۵ : اگر $A \cup B = \varnothing$ باشد، ثابت کنید $A = B = \varnothing$.

✎ حل:

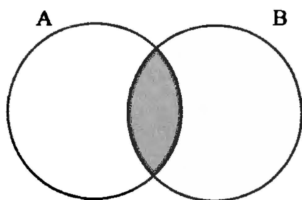
$$\left.\begin{array}{l} A \subset A \cup B \\ A \cup B = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A \subset \varnothing \\ \varnothing \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow A = \varnothing$$

$$\left.\begin{array}{l} B \subset A \cup B \\ A \cup B = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B \subset \varnothing \\ \varnothing \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow B = \varnothing$$

☆ اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه‌ی A و B که آن‌را با $A \cap B$ نشان می‌دهیم مجموعه‌ای است که عضوهای آن هم در A باشند و هم در B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ , \ x \in B\}$$



مثال ۵۶: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۴,۵,۶,۷,۸\}$ باشد، $A\cap B$ را مشخص کنید.

حل:

$$A\cap B=\{۴,۵,۶\}$$

مثال ۵۷: اگر $A=\{x|x\in\mathbb{R},-۵\le x\le ۳\}$ و $B=\{x|x\in\mathbb{R},-۲\le x<۹\}$ باشد، $A\cap B$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

حل:

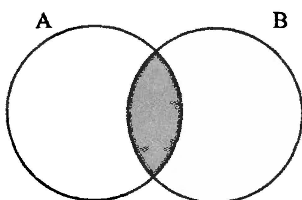
$$A\cap B=\{x|x\in\mathbb{R},-۲\le x\le ۳\}$$

مثال ۵۸: اگر $C=\{x|x\in\mathbb{R},x<-۱۵\}$ و $D=\{x|x\in\mathbb{R},x\le -۹\}$ باشد، $C\cap D$ را مشخص کنید.

حل:

$$C\cap D=\{x|x\in\mathbb{R},x\le -۹\}$$

نکته: اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند،
آن‌گاه $A\cap B\subset A$ و $A\cap B\subset B$.



مثال ۵۹: اگر $A=\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳\}$ و $B=\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵\}$ باشند، $A\cap B$ را مشخص کنید.

حل:

$$A\cap B=\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳\}=A$$

قضیه: ثابت کنید اگر $A\subset B$ باشد، آن‌گاه $A\cap B=A$.

برهان: اگر x عضو دلخواهی از A باشد، با توجه به فرض عضو B نیز می‌باشد. بنابراین $x\in A\cap B$. پس می‌توان گفت:

$$\left.\begin{matrix}A\subset A\cap B\\ A\cap B\subset A\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cap B=A$$

قضیه: اگر $A \cap B = A$ ثابت کنید، $A \subset B$.

برهان:

$$\left.\begin{aligned} A \cap B \subset B \\ A \cap B = A \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \subset B$$

مثال ۶۰ : ثابت کنید $A \cap A = A$.

حل:

$$A \subset A \Rightarrow A \cap A = A$$

مثال ۶۱ : ثابت کنید $A \cap \varnothing = \varnothing$.

حل:

$$\varnothing \subset A \Rightarrow A \cap \varnothing = \varnothing$$

مثال ۶۲ : ثابت کنید $A \cap M = A$.

حل:

$$A \subset M \Rightarrow A \cap M = A$$

مثال ۶۳ : اگر $A = \{۷,۸,۹\}$ و $M = \{۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$ باشد، $A \cap A'$ را مشخص کنید.

حل:

$$A' = \{۱۰,۱۱,۱۲\}$$
$$A \cap A' = \{۷,۸,۹\} \cap \{۱۰,۱۱,۱۲\} = \varnothing$$

مثال ۶۴ : ثابت کنید $A \cap A' = \varnothing$.

حل:

$$A \cap A' = \{x \mid x \in A \ , x \in A'\} = \{x \mid x \in A \ , x \notin A\} = \varnothing$$

مثال ۶۵ : اگر $A \cap B = M$ باشد، ثابت کنید $A = B = M$.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B\subset A \\ A\cap B=M \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} M\subset A \\ A\subset M \end{array}\right\}\Rightarrow A=M$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B\subset B \\ A\cap B=M \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} M\subset B \\ B\subset M \end{array}\right\}\Rightarrow B=M$$

نکته: اجتماع و اشتراک n مجموعه‌ی $A_۱, A_۲, ..., A_n$ را به ترتیب با نمادهای زیر $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i$ و $\bigcap_{i=۱}^{n} A_i$ نشان می‌دهند.

$$\bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A_۱\cup A_۲\cup ...\cup A_n$$

$$\bigcap_{i=۱}^{n} A_i = A_۱\cap A_۲\cap ...\cap A_n$$

☆ دو مجموعه‌ی جدا از هم

دو مجموعه‌ی A و B را جدا از هم گویند، در صورتی‌که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند. یعنی: $A\cap B=\varnothing$

مثال ۶۶ : مجموعه‌ی اعداد زوج و مجموعه‌ی اعداد فرد دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.

مثال ۶۷ : اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم و B و C نیز دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند آیا می‌توان گفت A و C نیز جدا از همند؟

حل:

خیر، زیرا:

$A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۳,۴\}$ و $C=\{۱,۵\}$

در این مثال A و B جدا از هم و B و C نیز جدا از همند. اما A و C جدا از هم نیستند.

مثال ۶۸ : اگر دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آیا متممشان نیز جدا از هم خواهند بود؟

حل:

خیر، زیرا:

$M=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

$A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۳,۴\}$

$A'=\{۳,۴,۵\}$ و $B'=\{۱,۲,۵\}$

A و B جدا از همند ولی A' و B' عضو مشترک دارند.

مثال ۶۹ : طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(A\cup M')'\cup(A\cup\varnothing')'$

ب) $(A\cap M')'\cap(\varnothing'\cup A)'$

ج) $(A\cup\varnothing)'\cup(A\cup M')$

د) $(A'\cup A)'\cup(A\cap A')'$

حل:

الف) $(A\cup M')'\cup(A\cup\varnothing')'=(A\cup\varnothing)'\cup(A\cup M)'=A'\cup M'$

$=A'\cup\varnothing=A'$

ب) $(A\cap M')'\cap(\varnothing'\cup A)'=(A\cap\varnothing)'\cap(M\cup A)'=\varnothing'\cap M'$

$=M\cap\varnothing=\varnothing$

ج) $(A\cup\varnothing)'\cup(A\cup M')=A'\cup(A\cup\varnothing)=A'\cup A=M$

د) $(A'\cup A)'\cup(A\cap A')'=M'\cup\varnothing'=\varnothing\cup M=M$

☆ خواص اجتماع و اشتراک دو مجموعه

۱) خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری):

$A\cap B=B\cap A$

$A\cup B=B\cup A$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری (انجمنی):

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

۳) خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری):

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

۴) قوانین دمُرگان:

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $\qquad$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

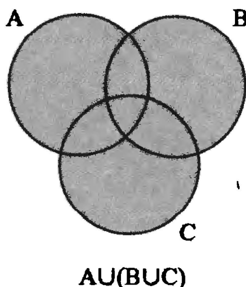
۵) قوانین جذب:

$A \cap (A \cup B) = A$ $\qquad$ $A \cup (A \cap B) = A$

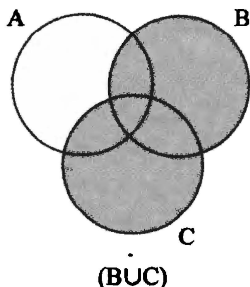
مثال ۷۰ : درستی خاصیت شرکت‌پذیری اجتماع را با نمودار ون تحقیق کنید.

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

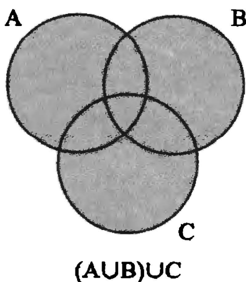
حل:



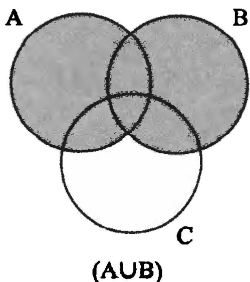
AU(BUC)



(BUC)



(AUB)UC



(AUB)

مثال ۷۱ :صحت خاصیت شرکت‌پذیری اجتماع را با مثال نشان دهید:

حل:

$A = \{۱,۲,۳\}$ $\qquad$ $B = \{۳,۴,۵\}$ $\qquad$ $C = \{۲,۳,۵,۶\}$

$A \cup (B \cup C) = \{۱,۲,۳\} \cup \{۲,۳,۴,۵,۶\} = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

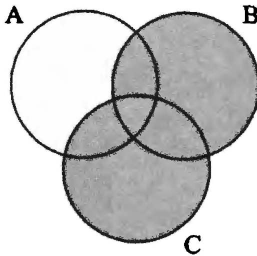
$(A \cup B) \cup C = \{۱,۲,۳,۴,۵\} \cup \{۲,۳,۵,۶\} = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

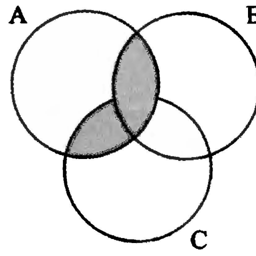
مثال ۷۲ : درستی خاصیت پخشی اشتراک نسبت به اجتماع را با نمودار ون تحقیق کنید.

حل:

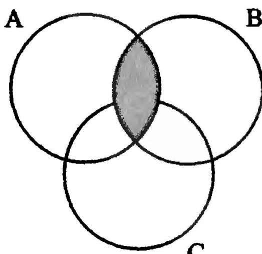
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



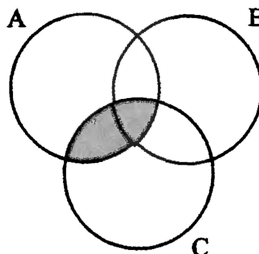
(B∪C)



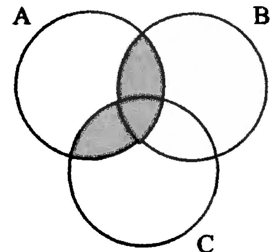
A∩(B∪C)



(A∩B)



(A∩C)

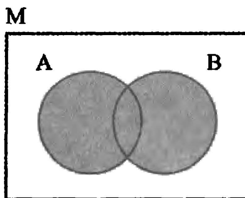


(A∩B)∪(A∩C)

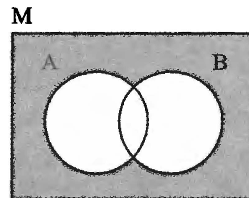
ملاحظه می‌شود: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

مثال ۷۳ : درستی رابطه‌ی $(A \cup B)' = A' \cap B'$ را با نمودار ون نشان دهید.

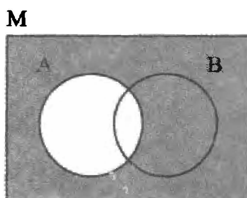
حل:



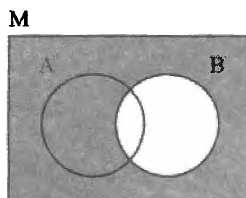
(A∪B)



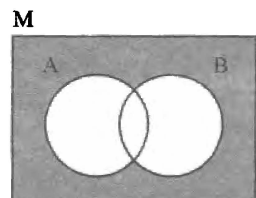
(A∪B)



A′



B′



A′∪B′

ملاحظه می‌شود:

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

مثال ۷۴ : صحت تساوی $(A\cup B)'=A'\cap B'$ را با مثال بررسی کنید.

حل:

$M=\{a,b,c,d,e,f\}$ $\quad A=\{a,d\}$ $\quad B=\{d,e,f\}$

$A'=\{b,c,e,f\}$ $\quad B'=\{a,b,c\}$ $\quad A\cup B=\{a,d,e,f\}$

$$\left.\begin{array}{l}(A\cup B)'=\{b,c\}\\ A'\cap B'=\{b,c\}\end{array}\right\}\Rightarrow (A\cup B)'=A'\cap B'$$

☆ اثبات قوانین جذب

الف) $A\cup(A\cap B)=A$

اثبات: $A\cup(A\cap B)=(A\cap M)\cup(A\cap B)=A\cap(M\cup B)=A\cap M=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=A$

اثبات: $A\cap(A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)=A\cup(\varnothing\cap B)=A\cup\varnothing=A$

مثال ۷۵ : اگر $M=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ و $A'\cup B=\{۵,۶,۷,۸\}$ باشند، حاصل $A\cap B'$ را به‌دست آورید.

حل:

اثبات: $A\cap B'=(A'\cup B)'=\{۱,۲,۳,۴,۹,۱۰\}$

مثال ۷۶ : ثابت کنید: $A\cap(A'\cap B)=\varnothing$

حل:

$$A\cap(A'\cap B)=(A\cap A')\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$$

مثال ۷۷ : ثابت کنید: $(A\cup B)\cup B'=M$

حل:

$$(A\cup B)\cup B'=A\cup(B\cup B')=A\cup M=M$$

مثال ۷۸ : ثابت کنید: $A\cap(A'\cup B)=A\cap B$

حل:

$$A\cap(A'\cup B)=(A\cap A')\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$$

مثال ۷۹ : ثابت کنید: $(A'\cup B)\cup(A\cup B')=M$

حل:

$$(A'\cup B)\cup(A\cup B')=(A'\cup A)\cup(B\cup B')=M\cup M=M$$

مثال ۸۰ : ثابت کنید: $(A\cap B')\cap(A'\cap B)=\varnothing$

حل:

$$(A\cap B')\cap(A'\cap B)=(A\cap A')\cap(B'\cap B)=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$$

مثال ۸۱ : ثابت کنید: $(A\cup B')\cap(A\cup B)=A$

حل:

$$(A\cup B')\cap(A\cup B)=A\cup(B'\cap B)=A\cup\varnothing=A$$

مثال ۸۲ : ثابت کنید: $(A'\cap B)\cup(A'\cap B')=A'$

حل:

$$(A'\cap B)\cup(A'\cap B')=A'\cap(B\cup B')=A'\cap M=A'$$

مثال ۸۳ : ثابت کنید: $A\cup(A\cap B')'=M$

حل:

$$A\cup(A\cap B')'=A\cup(A'\cup B)=(A\cup A')\cup B=M\cup B=M$$

مثال ۸۴ : ثابت کنید: $(A\cup B')\cup(A'\cap B)=M$

حل:

$$(A\cup B')\cup(A'\cap B)=(A\cup B')\cup(A\cup B')'=M$$

مثال ۸۵ : ثابت کنید: $(A\cup M')\cup(A'\cup B)'=A$

حل:

$$(A\cup M')\cup(A'\cup B)' = (A\cup\varnothing)\cup(A\cap B') = A\cup(A\cap B') = A$$

مثال ۸۶ : ثابت کنید: $(A\cap B')\cup(B\cap A') = (A\cup B)\cap(A'\cup B')$

حل:

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A'\cup B') &= [(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B'] \\ &= [(A\cap A')\cup(B\cap A')]\cup[(A\cap B')\cup(B\cap B')] \\ &= \varnothing\cup(B\cap A')\cup(A\cap B')\cup\varnothing \\ &= (B\cap A')\cup(A\cap B') \\ &= (A\cap B')\cup(B\cap A')\end{aligned}$$

نکته: اگر $A=B$ باشد، آن‌گاه $A\cup C=B\cup C$ و $A\cap C=B\cap C$.

مثال ۸۷ :اگر $A\cap C=B\cap C$ باشد، آیا می‌توان گفت $A=B$؟ چرا؟

حل:

خیر، زیرا اگر درنظر بگیریم:

$A=\{۱,۲,۳\}$ $\quad B=\{۲,۳,۴\}$ $\quad C=\{۲,۳,۵\}$

$A\cap C=\{۲,۳\}$ و $B\cap C=\{۲,۳\}$

ملاحظه می‌شود $A\cap C=B\cap C$ ولی $A\neq B$.

قضیه: اگر $A\cup C=B\cup C$ و $A\cap C=B\cap C$، ثابت کنید: $A=B$.

برهان:

$$A \overset{\text{جذب}}{=\!=} A\cap(A\cup C) \overset{\text{فرض}}{=\!=} A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$\overset{\text{فرض}}{=\!=} (A\cap B)\cup(B\cap C)$$

$$= B\cap(A\cup C) \overset{\text{فرض}}{=\!=} B\cap(B\cup C) \overset{\text{جذب}}{=\!=} B$$

مثال ۸۸ : اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید: $B'\cap(A\cup B)=A$

حل:

$$B'\cap(A\cup B)=(B'\cap A)\cup(B'\cap B)=(B'\cap A)\cup\varnothing$$
$$=(B'\cap A)\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)=A\cap M=A$$

مثال ۸۹ : اگر $A\subset B$ ثابت کنید: $A'\cup B=M$

حل:

$$A\subset B\Rightarrow A\cup B=B \qquad (۱)$$
$$A'\cup B\overset{(۱)}{=}A'\cup(A\cup B)=(A'\cup A)\cup B=M\cup B=M$$

مثال ۹۰ : اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید: $A\subset B'$.

حل:

$$A\cap B=\varnothing\Rightarrow(A\cap B)\cup B'=\varnothing\cup B'$$
$$\Rightarrow(A\cup B')\cap(B\cup B')=B'$$
$$\Rightarrow(A\cup B')\cap M=B'\Rightarrow A\cup B'=B'\Rightarrow A\subset B'$$

مثال ۹۱ : اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید $A\cup B'=B'$ و بالعکس.

حل:

$$A\cap B=\varnothing\Rightarrow B'\cup(A\cap B)=B'\cup\varnothing\Rightarrow B'\cup A=B'$$

برعکس:

$$A\cup B'=B'\Rightarrow B\cap(A\cup B')=B\cap B'\Rightarrow(B\cap A)\cup(B\cap B')=\varnothing$$
$$\Rightarrow(B\cap A)\cup\varnothing=\varnothing\Rightarrow A\cap B=\varnothing$$

مثال ۹۲ : اگر $A\subset B$ ثابت کنید $A\cap B'=\varnothing$ و بالعکس.

حل:

$$A\subset B\Rightarrow A\cap B=A \qquad (۱)$$
$$A\cap B'\overset{(۱)}{=}(A\cap B)\cap B'=A\cap(B\cap B')=A\cap\varnothing=\varnothing$$

و برعکس:

$$A \cap B' = \varnothing \Rightarrow (A \cap B') \cup B = \varnothing \cup B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$$

مثال ۹۳ : اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید: $A \cap B' = A$.

حل:

$$A \cap B = \varnothing$$
$$A \cap B' = (A \cap B') \cup \varnothing = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B)$$
$$= A \cap M = A$$

مثال ۹۴ : اگر $A \subset B$ ثابت کنید:

الف) $A \cup C \subset B \cup C$

ب) $A \cap C \subset B \cap C$

حل:

برای اثبات قسمت (الف) کافی است نشان دهیم:

$$(A \cup C) \cup (B \cup C) = B \cup C$$

$$(A \cup C) \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (C \cup C) \overset{\text{فرض}}{=\!=} B \cup C$$

برای اثبات قسمت (ب) کافی است نشان دهیم:

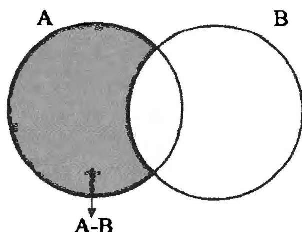
$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap C$$

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (C \cap C) \overset{\text{فرض}}{=\!=} A \cap C$$

☆ عمل تفاضل

تفاضل دو مجموعه‌ی A و B که آن را به‌صورت $A - B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A باشند ولی در B نباشند.

$$A - B = \{x \mid x \in A \ , x \notin B\}$$



نکته: از تعریف فوق نتیجه می‌شود:

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \ , x \notin B$$

مثال ۹۵ : اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$ حاصل $A-B$ و $B-A$ را مشخص کنید.

حل:

$$A-B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۳,۴,۵,۶,۷\}=\{۱,۲\}$$

$$B-A=\{۳,۴,۵,۶,۷\}-\{۱,۲,۳,۴,۵\}=\{۶,۷\}$$

مثال ۹۶ : اگر $A=\left\{x \,\middle|\, \frac{x}{۲}\in Z\right\}$ و $B=\left\{x \,\middle|\, \frac{x}{۴}\in Z\right\}$، مجموعه‌ی $A-B$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

حل:

$$A-B=\{\ldots,-۶,-۴,-۲,۰,۲,۴,۶,\ldots\}-\{\ldots,-۸,-۴,۰,۴,۸,\ldots\}$$

$$=\{\ldots,-۶,-۲,۲,۶,\ldots\}=\{۴x-۲ \mid x\in Z\}$$

> **قضیه:** ثابت کنید $A-B\subset A$.

برهان:

$$x\in A-B \Rightarrow (x\in A \quad \text{و} \quad x\notin B)\Rightarrow x\in A$$

> **قضیه:** ثابت کنید $A-B=A\cap B'$.

برهان:

$$x\in A-B \Leftrightarrow (x\in A \quad \text{و} \quad x\notin B)\Leftrightarrow (x\in A \quad \text{و} \quad x\in B')\Leftrightarrow x\in A\cap B'$$

مثال ۹۷ : ثابت کنید تساوی‌های زیر همواره درستند:

الف) $A-A=\varnothing$

ب) $A-\varnothing=A$

ج) $\varnothing-A=\varnothing$

د) $M-A=A'$

هـ) $A-M=\varnothing$

و) $A-A'=A$

حل:

الف) $A-A=A\cap A'=\varnothing$

ب) $A-\varnothing=A\cap\varnothing'=A\cap M=A$

ج) $\varnothing-A=\varnothing\cap A'=\varnothing$

د) $M-A=M\cap A'=A'$

هـ) $A-M=A\cap M'=A\cap\varnothing=\varnothing$

و) $A-A'=A\cap(A')'=A\cap A=A$

مثال ۹۸ : اگر $A\subset B$ ثابت کنید $A-B=\varnothing$ و بالعکس.

حل:

$$A\subset B\to A\cap B=A \qquad (۱)$$

$$A-B=A\cap B'\overset{(۱)}{=}(A\cap B)\cap B'=A\cap(B\cap B')=A\cap\varnothing=\varnothing$$

برعکس:

$$A-B=\varnothing\Rightarrow A\cap B'=\varnothing$$
$$\Rightarrow B\cup(A\cap B')=B\cup\varnothing$$
$$\Rightarrow A\cup B=B$$
$$\Rightarrow A\subset B$$

مثال ۹۹ :اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید $A-B=A$ و برعکس.

حل:

فرض می‌کنیم $A\cap B=\varnothing$. بنابراین:

$$A-B=(A-B)\cup\varnothing=(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)$$
$$=A\cap M=A$$

برعکس:

$$A-B=A\Rightarrow B\cap(A-B)=B\cap A\Rightarrow A\cap B=\varnothing$$

مثال ۱۰۰ : درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $A-(A\cap B)=A-B$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

ج) $A-B=B'-A'$

د) $(A\cup B')\cap(A'\cup B)=(B'-A)\cup(A-B')$

هـ) $(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$

و) $A-(B-A)=A$

حل:

الف) $A-(A\cap B)=A\cap(A\cap B)'=A\cap(A'\cup B')=A\cap B'=A-B$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)$
$=A\cap M=A$

ج) $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$

د) $(A\cup B')\cap(A'\cup B)=[(A\cup B')\cap A']\cup[(A\cup B')\cap B]$
$=(B'\cap A')\cup(A\cap B)=(B'-A)\cup(A-B')$

هـ) $(A\cup B)-(B\cup C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)'=(A\cup B)\cap(B'\cap C')$
$=[(A\cup B)\cap B']\cap C'=(A\cap B')\cap C'=(A-B)-C$

و) $A-(B-A)=A-(B\cap A')=A\cap(B\cap A')'=A\cap(B'\cup A)=A$

مثال ۱۰۱ : با یک مثال تحقیق کنید عمل تفاضل دارای خاصیت شرکت‌پذیری هست یا خیر؟

حل:

$A=\{a,b,c\}$ $B=\{b,c,d\}$ $C=\{c,d,e\}$

$(A-B)-C=\{a\}-\{c,d,e\}=\{a\}$

$A-(B-C)=\{a,b,c\}-\{b\}=\{a,c\}$

ملاحظه می‌شود: $(A-B)-C\neq A-(B-C)$

مثال ۱۰۲ : ثابت کنید اشتراک از سمت چپ روی تفاضل توزیع‌پذیر است، یعنی:

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

حل:

$$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$
$$=(A\cap B\cap A')\cup(A\cap B\cap C')=\varnothing\cup(A\cap B\cap C')$$
$$=A\cap(B\cap C')=A\cap(B-C)$$

مثال ۱۰۳ : ثابت کنید تفاضل از راست بر اجتماع توزیع‌پذیر است.

$$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$$

حل:

$$(A-C)\cup(B-C)=(A\cap C')\cup(B\cap C')=(A\cup B)\cap C'$$
$$=(A\cup B)-C$$

مثال ۱۰۴ : بدون عضوگیری ثابت کنید اگر $A\subset B$ آن‌گاه $B'\subset A'$ و بالعکس.

حل:

$$A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow(A\cup B)'=B'\Leftrightarrow A'\cap B'=B'\Leftrightarrow B'\subset A'$$

مثال ۱۰۵ : بدون عضوگیری ثابت کنید اگر $A\subset B$ و $B\subset C$ آن‌گاه $A\subset C$.

حل:

$$A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A$$
$$B\subset C\Leftrightarrow B\cap C=B$$
$$A=A\cap B=A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap C\Rightarrow A\subset C$$

مثال ۱۰۶ : ثابت کنید اگر $A-B=B-A$ آن‌گاه $A=B$.

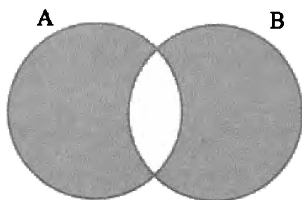
حل:

$$A-B=B-A\Rightarrow A\cap B'=B\cap A'$$
$$A\cup(A\cap B')=A\cup(B\cap A')\Rightarrow A=A\cup B \qquad (۱)$$

$$A-B=B-A\Rightarrow A\cap B'=B\cap A'$$
$$\Rightarrow B\cup(A\cap B')=B\cup(B\cap A')$$
$$\Rightarrow B\cup A=B \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow A=B$$

✩ عمل تفاضل متقارن



تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی A و B که آن‌را با $A \Delta B$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

مثال ۱۰۷: اگر $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $B = \{۳,۴,۵\}$ مجموعه‌ی $A \Delta B$ را مشخص کنید.

حل:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{۱,۲\} \cup \{۵\} = \{۱,۲,۵\}$$

خواص تفاضل متقارن دو مجموعه

۱) $A \Delta A = \varnothing$

اثبات: $A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

۲) $A \Delta \varnothing = A$

اثبات: $A \Delta \varnothing = (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A \cup \varnothing = A$

۳) $A \Delta M = A'$

اثبات: $A \Delta M = (A - M) \cup (M - A) = \varnothing \cup A' = A'$

۴) $A \Delta A' = M$

اثبات: $A \Delta A' = (A - A') \cup (A' - A) = A \cup A' = M$

۵) $A \Delta B = B \Delta A$ خاصیت جابه‌جایی

اثبات: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$

۶) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

اثبات: $(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$

$= (B \cap A') \cup (A \cap B') = (B - A) \cup (A - B)$

$= (A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$

۷) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ خاصیت شرکت‌پذیری

اثبات: $A \Delta (B \Delta C) = A \Delta [(B \cup C) \cap (B' \cup C')]$

$$=\{A\cup[(B\cup C)\cap(B'\cup C')]\}\cap\{A'\cup[(B\cup C)\cap(B'\cup C')]'\}$$

$$=(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B'\cup C')\cap\{A'\cup[(B'\cap C')\cup(B\cap C)]\}$$

$$=(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B'\cup C')\cap\{A'\cup[[(B'\cap C')\cup B]\cap[(B'\cap C')\cup C]]\}$$

$$=(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B'\cup C')\cap\{A'\cup[(C'\cup B)\cap(B'\cup C)]\}$$

$$=(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B'\cup C')\cap(A'\cup C'\cup B)\cap(A'\cup B'\cup C) \quad (۱)$$

$$(A\Delta B)\Delta C=\{[(A\cup B)\cap(A'\cup B')]\cup C\}\cap\{[(A\cup B)\cap(A'\cup B')]'\cup C'\}$$

$$=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C)\cap[(A\cup B)'\cup(A'\cup B')'\cup C']$$

$$=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C)\cap[(A'\cap B')\cup(A\cap B)\cup C']$$

$$=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C)\cap\{\{[(A'\cap B')\cup A]\cap[A'\cap B')\cup B]\}\cup C'\}$$

$$=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C)\cap\{[(B'\cap A)\cap(A'\cup B)]\cup C'\}$$

$$=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C)\cap(A\cup B'\cup C')\cap(A'\cup B\cup C') \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$$

۸) $A\Delta B=A\Delta C\Rightarrow B=C$

اثبات: طرفین تساوی $A\Delta B=A\Delta C$ را از طرف چپ با A ترکیب می‌کنیم.

$$A\Delta(A\Delta B)=A\Delta(A\Delta C)$$

$$(A\Delta A)\Delta B=(A\Delta A)\Delta C\Rightarrow\varnothing\Delta B=\varnothing\Delta C\Rightarrow B=C$$

۹) $A\Delta B=\varnothing\Rightarrow A=B$

اثبات: $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing\Rightarrow(A-B=\varnothing\ ,\ B-A=\varnothing)$

$$\Rightarrow A\subset B\ \ ,B\subset A\Rightarrow A=B$$

مثال ۱۰۸ : اگر $A\subset B$ ثابت کنید: $A\Delta B=B-A$.

حل:

$$A\subset B\Rightarrow A-B=\varnothing$$

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing\cup(B-A)=B-A$$

مثال ۱۰۹ : اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، ثابت کنید: $A \Delta B = A \cup B$.

حل:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = A \cup B$$

دو مجموعه‌ی هم ارز

فرض کنید A مجموعه‌ی صندلی‌های موجود در یک سالن و B مجموعه‌ی افرادی باشند که باید روی صندلی‌ها بنشینند. اگر پس از نشستن همه‌ی افراد هیچ صندلی خالی نماند و هیچ شخصی سرپا نماند، در این حالت می‌گوییم هر صندلی به یک فرد و هر فرد به یک صندلی نظیر شده است.

تعریف: بین دو مجموعه‌ی A و B یک تناظر یک به یک وجود دارد، هرگاه بتوان به هر عضو A یک و تنها یک عضو B و به هر عضو B یک و تنها یک عضو A را نظیر کرد. در مثال فوق بین مجموعه‌ی صندلی‌های موجود در سالن و مجموعه‌ی افراد یک تناظر یک به یک برقرار است.

☆ دو مجموعه‌ی هم‌ارز (معادل)

دو مجموعه‌ی A و B را هم‌ارز گویند در صورتی‌که بین اعضای دو مجموعه حداقل یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد. هم‌ارزی دو مجموعه‌ی A و B را به‌صورت $A \simeq B$ نشان می‌دهند.

مثال ۱۱۰ : اگر $A = \{۱,۲,۳,...,۲۶\}$ و $B = \{a,b,c,...,z\}$ می‌توان گفت دو مجموعه‌ی A و B هم‌ارزند زیرا می‌توان بین اعضای این دو مجموعه یک تناظر یک به یک به‌صورت زیر برقرار کرد.

۱ , ۲ , ۳ , ... , ۲۶
↕ ↕ ↕ ↕
a , b , c , ... , z

مثال ۱۱۱ : مجموعه‌ی مردم ایران و مجموعه‌ی شناسنامه‌هایشان دو مجموعه‌ی هم‌ارزند.

مثال ۱۱۲ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی دو مجموعه‌ی هم‌ارزند.

۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ... , n , ...
↕ ↕ ↕ ↕ ↕
۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ... , ۲n , ...

مثال ۱۱۳ : مجموعه‌ی $A=\left\{x^{۲}\middle|x\in N\right\}$ و مجموعه‌ی N دو مجموعه‌ی هم‌ارزند.

$$\begin{array}{ccccccc} ۱, & ۲, & ۳, & ۴, & \dots, & n, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ ۱, & ۴, & ۹, & ۱۶, & \dots, & n^{۲}, & \dots \end{array}$$

مثال ۱۱۴ : مجموعه‌ی اعداد صحیح و مجموعه‌ی مضارب صحیح عدد ۵ دو مجموعه‌ی هم‌ارزند.

$$\begin{array}{cccccccc} \dots, & -۳, & -۲, & -۱, & ۰, & ۱, & ۲, & ۳, \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \dots, & -۱۵, & -۱۰, & -۵, & ۰, & ۵, & ۱۰, & ۱۵, \dots \end{array}$$

مثال ۱۱۵ : مجموعه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰ و مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶ هم ارز نیستند.

$A\{۲,۳,۵,۷\}$ $\qquad$ $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

☆ تعریف قطعه‌ای از اعداد طبیعی

فرض کنیم k یک عدد طبیعی باشد. مجموعه‌ی $N_k=\{۱,۲,۳,\dots,k\}$ را قطعه‌ای از اعداد طبیعی می‌نامند.

مثال ۱۱۶ :

$N_۵=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $N_{۵۰}=\{۱,۲,۳,\dots,۵۰\}$

☆ مجموعه‌ی متناهی

مجموعه‌ی A را متناهی گویند، هرگاه تهی باشد و یا با قطعه‌ای از اعداد طبیعی هم‌ارز باشد.

☆ عدد اصلی یک مجموعه

تعداد عضوهای مجموعه‌ی متناهی A را عدد اصلی A گفته با نماد $|A|$ یا $n(A)$ نشان می‌دهند. بدیهی است که $n(\varnothing)=۰$ و اگر $A\simeq N_k$ آن‌گاه $n(A)=k$.

نکته: اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، در این صورت می‌توان گفت:

$$\boxed{A\simeq B\Leftrightarrow n(A)=n(B)}$$

✰ مجموعه‌ی نامتناهی

مجموعه‌ای که متناهی نباشد، نامتناهی نامیده می‌شود. برای مجموعه‌ی نامتناهی عدد اصلی تعریف **نمی‌شود**.

مثال ۱۱۷ : هریک از مجموعه‌های $A = \{۲,۳,۵,۷,۱۱\}$ و $B = \{۲,۴,۸,...,۲^{۵۰}\}$ و $C = \left\{x \middle| x \in Z \ , \frac{۱}{x} \in Z \right\}$ متناهی‌اند. زیرا $n(A) = ۵$، $n(B) = ۵۰$ و چون $C = \{-۱,۱\}$ لذا $n(C) = ۲$. اما هریک از مجموعه‌های W، N، Z، $E = \{۲,۴,۶,...\}$، $O = \{۱,۳,۵,۷,...\}$، Q، R و ... نامتناهی‌اند.

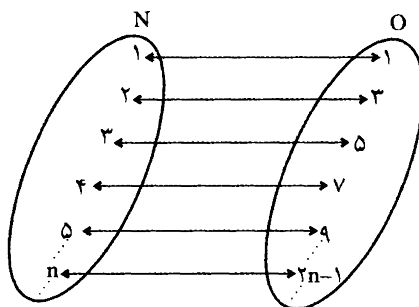
نکته: هر مجموعه که زیرمجموعه‌ای نامتناهی داشته باشد، خود نامتناهی است.

نکته: هر مجموعه که با یک زیرمجموعه‌ی محض خودش هم‌ارز باشد، نامتناهی است.

مثال ۱۱۸ : نشان دهید مجموعه‌ی اعداد طبیعی (N) با مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد (O) هم‌ارز است.

حل:

تناظر زیر را درنظر می‌گیریم:



بدیهی است که با روند نشان داده شده در بالا تناظر ارائه شده یک تناظر یک به یک است. بنابراین مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد هم‌ارزند.

اگر یک تناظر یک به یک بین دو مجموعه برقرار شود، بهتر است قانون یا ضابطه‌ای که طی آن هر عضو مجموعه‌ی اول (معمولاً مجموعه‌ی سمت چپ در نمودار را مجموعه‌ی اول گویند) به

یک و فقط یک عضو مجموعه‌ی دوم و بالعکس مربوط می‌شوند را مشخص کنیم. با دقت در تناظر بالا درمی‌یابیم که هر عضو n از N با عضو $۲n-۱$ از O مرتبط است. این ارتباط را این‌گونه نشان می‌دهند:

$N \longleftrightarrow O$

$n \longleftrightarrow ۲n-۱$

با داشتن این ضابطه به سؤالات زیادی می‌توان پاسخ داد. این‌که در این تناظر عضو ۱۳۷۸ از N با عضو $۲۷۵۵ = ۱ - ۱۳۷۸ \times ۲$ از O مرتبط است. یا عضو ۱۰۱ از O با عضو ۵۱ از N مرتبط می‌باشد. زیرا:

$۲k - ۱ = ۱۰۱ \Rightarrow ۲k = ۱۰۲ \Rightarrow k = ۵۱$

و نکات دیگری از این قبیل. به مثال زیر دقت کنید:

مثال ۱۱۹ : فرض کنید در یک سالن تخیلی تعدادی نامتناهی صندلی یک‌نفره موجود باشند و برای شماره‌گذاری صندلی‌ها از شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ... استفاده شده باشد! فرض کنید تعداد نامتناهی دانش‌آموز در پشت درب این سالن تخیلی ایستاده‌اند تا در زمان اعلام شده وارد سالن شده و بر روی صندلی‌ها بنشینند. شخصی در مقابل درب ورودی ایستاده و می‌خواهد به هریک از دانش‌آموزان یکی از شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ... را ارائه دهد تا هر دانش‌آموز بر صندلی‌ای که شماره‌ی آن در دستش می‌باشد قرار گیرد. ناگهان فرد شماره دهنده متوجه می‌شود که شماره‌های زوج ۲، ۴، ۶ و ... را با خود نیاورده و فقط شماره‌های فرد ۱، ۳، ۵ و ... را به همراه دارد. به ناچار بر اثر ازدحام دانش‌آموزان مجبور می‌شود که فقط به هر دانش‌آموز یک شماره‌ی فرد را بدهد و دانش‌آموزان وارد سالن می‌شوند. اگر بخواهیم هیچ صندلی‌ای خالی نماند، باید این محدودیت را که هر دانش‌آموز روی صندلی‌ای بنشیند که شماره‌اش در دستش می‌باشد را اعمال نکنیم. آیا می‌توانید بگویید افراد از چه فرمولی برای یافتن صندلی خودشان استفاده کنند تا این مشکل حل شود؟

حل:

گرچه صورت سؤال کمی طولانی شده ولی این مثال همان مثال قبل است. یعنی می‌خواهیم بین N و O یک تناظر یک به یک برقرار کنیم. در این تناظر شخصی که شماره‌ی $۲k-۱$ را دارد می‌تواند بر صندلی شماره‌ی k بنشیند. برای یافتن k می‌تواند به شماره‌ی نوشته شده در

دستش یک واحد اضافه کند و حاصل را بر ۲ تقسیم نماید.

$$\frac{(۲k-۱)+۱}{۲}=\frac{۲k}{۲}=k$$

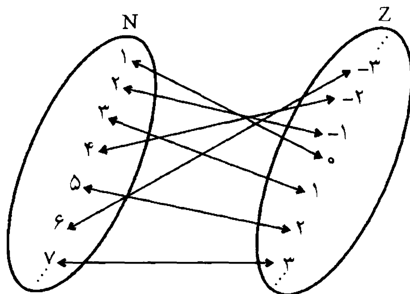
☆ مجموعه‌ی شمارا (شمارش‌پذیر)

هر مجموعه که با قطعه‌ای از اعداد طبیعی یا خود اعداد طبیعی هم‌ارز باشد مجموعه‌ی شمارا نامیده می‌شود. در مثال‌های بالا نشان داده‌ایم که O شمارا می‌باشد.

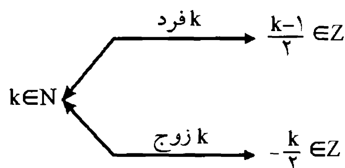
مثال ۱۲۰ : نشان دهید Z شمارا می‌باشد.

حل:

تناظر زیر را درنظر بگیرید.



با توجه به نمودار فوق ملاحظه می‌گردد که اعضاء فرد N با اعضای غیرمنفی Z و اعضای زوج N با اعضای منفی Z مرتبط شده‌اند. به عبارتی برای بیان قانون این هم‌ارزی باید ابتدا عضو k از N را انتخاب کرده و سپس با توجه به زوج یا فرد بودن آن، ارتباط k را با عضوهای Z مشخص کنیم.



مثال ۱۲۱ : در هم‌ارزی فوق:

الف) عضو ۱۰۳ از N با چه عضوی Z از در ارتباط است؟

ب) عضو ۸۲ از N با چه عضوی از Z در ارتباط است؟

ج) عضو ۵۴ از Z با چه عضوی از N در ارتباط است؟

د) عضو ۱۳− از Z با چه عضوی از N در ارتباط است؟

حل:

الف) چون $N \in ۱۰۳$ فرد است، با توجه به ضابطه‌ی داده شده با $۵۱ = \frac{۱۰۳-۱}{۲}$ از Z در ارتباط است.

ب) چون $N \in ۸۲$ زوج است با $-۴۱ = -\frac{۸۲}{۲}$ از Z در ارتباط است.

ج) چون $Z \in ۵۴$ مثبت است، داریم:

$$\frac{k-۱}{۲} = ۵۴ \Rightarrow k = ۱۰۹$$

پس ۵۴ از Z با ۱۰۹ از N رابطه دارد.

د) چون $Z \in ۱۳-$ منفی است، داریم:

$$-\frac{k}{۲} = -۱۳ \Rightarrow k = ۲۶$$

پس ۱۳- از Z با ۲۶ از N رابطه دارد.

به چند قضیه که در مورد مجموعه‌های هم‌ارز موجود است و اثبات آن‌ها فعلاً امکان‌پذیر نیست توجه کنید.

قضیه ۱: به ازای هر مجموعه‌ی غیرتهی مانند A داریم: $A \simeq A$.

قضیه‌ی ۲: به ازای هر دو مجموعه‌ی A و B اگر $A \simeq B$ آن‌گاه $B \simeq A$.

قضیه‌ی ۳: به ازای هر سه مجموعه‌ی دلخواه A، B و C اگر داشته باشیم $A \simeq B$ و $B \simeq C$ آن‌گاه $A \simeq C$.

قضیه‌ی ۴: اگر A شمارا باشد، هر زیرمجموعه‌ی A نیز شمارا می‌باشد.

قضیه‌ی ۵: مجموعه‌ی اعداد گویا شمارا می‌باشد.

قضیه‌ی ۶: مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} , ۰ < x < ۱\}$ نامتناهی و ناشماراست.

قضیه‌ی ۷: R شمارا نیست.

قضیه‌ی ۸: اجتماع هر دو مجموعه‌ی شمارا مجموعه‌ی شمارا است.

قضیه‌ی ۹: اگر زیرمجموعه‌ای نامتناهی از یک مجموعه، شمارا نباشد، خود آن مجموعه نیز شمارا نیست.

قضیه‌ی ۱۰: مجموعه‌ی اعداد گنگ (اصم) شمارا نیست.

عدد اصلی اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی

اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، آن‌گاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

توضیح چگونگی برقراری این تساوی چنین است که برای یافتن تعداد اعضای $A \cup B$، اگر تعداد اعضاء A را با تعداد اعضای B جمع کنیم، تعداد اعضای $A \cap B$ دوبار محسوب می‌شود که باید یک‌بار آن‌را کم کنیم.

مثال ۱۲۲ : در یک کلاس ۳۲ نفره، فوتبال ورزش مورد علاقه‌ی ۲۴ نفر و والیبال ورزش مورد علاقه‌ی ۱۸ نفر می‌باشد. در این کلاس چند نفر هستند که هم به فوتبال و هم به والیبال علاقه دارند؟

حل:

فرض کنید تعداد کسانی که به فوتبال علاقه دارند $n(F)$ و تعداد کسانی که به والیبال علاقه‌مند می‌باشند $n(V)$ باشند.

$$n(F \cup V) = n(F) + n(V) - n(F \cap V) \Rightarrow ۳۲ = ۲۴ + ۱۸ - n(F \cap V)$$

$$\Rightarrow n(F \cap V) = ۱۰$$

مثال ۱۲۳ :اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی جدا از هم باشند، نشان دهید:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

حل:

چون $n(A \cap B) = ۰$، تساوی بالا بدیهی است.

$$A \cap B = \varnothing \to n(A \cap B) = n(\varnothing) = ۰$$

مثال ۱۲۴ :اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، ثابت کنید:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

حل:

مـی‌دانـیم $A=(A-B)\bigcup(A\bigcap B)$ و $A-B$ و $A\bigcap B$ دو مجموعـه‌ی جـدا از هـم می‌باشند. (چرا؟) بنابر مثال بالا:

$$n(A)=n\left[(A-B)\bigcup(A\bigcap B)\right]=n(A-B)+n(A\bigcap B)\Rightarrow n(A-B)$$
$$=n(A)-n(A\bigcap B)$$

بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل

مجموعه‌ی A و عمل * را در آن درنظر می‌گیـریم. مجموعـه‌ی A را نـسبت بـه عمـل * بـسته گویند، در صورتی‌که:

$$a\,,b\in A:a * b\in A$$

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته اسـت، زیـرا حاصـل جمع و حاصل ضرب دو عدد طبیعی عددی طبیعی است. اما نسبت به اعمـال تفریـق و تقـسیم بسته نیست، زیرا مثلاً:

$$۳\div۲=۱/۵\notin N \quad \text{و} \quad ۵-۸=-۳\notin N$$

مثال ۱۲۵ : مجموعه‌ی اعداد صحیح نسبت به کدام‌یک از چهار عمل اصلی بسته است؟

حل:

نسبت به اعمال جمع و تفریق و ضرب بسته است ولی نسبت به عمل تقسیم بسته نیست.

مثال ۱۲۶ : آیا مجموعه‌ی اعداد گویا نسبت به چهار عمل اصلی بسته است؟ چرا؟

حل:

خیر، نسبت به عمل تقسیم بسته نیست. زیرا مثلاً حاصل تقسیم عدد ۵ بـر صـفر عـددی گویـا نیست.

مثال ۱۲۷ : آیا می‌توان گفت مجموعه‌ی $Q-\{۰\}$ نسبت به چهار عمل اصلی بسته است؟

حل:

خیر، زیرا اعداد ۷ و ۷- در مجموعه‌ی $Q-\{۰\}$ می‌باشند، ولی: $-۷+۷=۰\notin Q-\{۰\}$

مثال ۱۲۸ : آیا مجموعه‌ی $A=\left\{۲^n \,\middle|\, n\in Z\right\}$ نسبت به عمل ضرب بسته است؟ نسبت به عمل جمع چطور؟

حل:

نسبت به عمل ضرب بسته است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} ۲^{x} \in A \\ ۲^{y} \in A \end{array}\right\} \Rightarrow ۲^{x} \times ۲^{y} = ۲^{x+y} \in A \ (x+y \in Z)$$

نسبت به عمل جمع بسته نیست، زیرا: $۲^{۲} + ۲^{۳} = ۴ + ۸ = ۱۲ \notin A$

مثال ۱۲۹ : آیا مجموعه‌ی $B = \{۳x + ۱ | x \in Z\}$ نسبت به جمع و ضرب بسته است یا خیر؟

حل:

$$B = \{\ldots, -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, \ldots\}$$

نسبت به جمع بسته نیست، زیرا: $۱ + ۴ = ۵ \notin B$

نسبت به ضرب بسته است، زیرا:

$$(۳x+۱)(۳y+۱) = ۹xy + ۳x + ۳y + ۱ = ۳(۳xy + x + y) + ۱ = ۳k + ۱$$

که در آن با توجه به بسته بودن Z نسبت به جمع و ضرب k عددی صحیح است.

تمرین‌های فصل دوم

۱. مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید:

$A=\left\{x \mid x\in Z\ ,\ \frac{x}{۲}\in Z\right\}$ $\quad$ $B=\left\{x \mid x\in Z\ ,\ \frac{x+۱}{۲}\in Z\right\}$

$C=\left\{۵x \mid x\in Z\ ,\ -۱۱<x\right\}$ $\quad$ $D=\left\{۷x \mid x\in Z\ ,\ -۷<x\leq ۹\right\}$

$E=\left\{۶x+۱ \mid x\in Z\right\}$ $\quad$ $F=\left\{x^{۲} \mid x\in Z\right\}$

$G=\left\{۳^{x} \mid x\in Z\ ,\ -۳\leq x<۵\right\}$ $\quad$ $H=\left\{x^{۳}+۲ \mid x\in Z\ ,\ x>-۵\right\}$

$I=\left\{x \mid x\in Z\ ,\ -۴\leq x^{۲}\leq ۲۵\right\}$ $\quad$ $j=\left\{x \mid x\in Z\ ,\ \frac{۲۸}{x}\in Z\right\}$

$=\left\{۳^{x}\times ۳^{y} \mid x,y\in N\ ,\ x+y=۵\right\}$ $\quad$ $L=\left\{x \mid x\in Z\ ,\ \sqrt{x-۱}\in Z\right\}$

$M=\left\{(-۱)^{x}\times ۳^{x} \mid x\in N\right\}$ $\quad$ $N=\left\{x \mid x=(-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}}\ ,\ n\in N\right\}$

$O=\left\{x \mid x\in Z\ ,\ \frac{۱}{x}\in Z\right\}$ $\quad$ $P=\left\{x \mid x\in Z\ ,\ \frac{x+۱}{۵}\in Z\right\}$

۲. مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی بنویسید.

$A=\{-۲۵,-۱۵,-۵,\dots,۱۰۵\}$ $\quad$ $B=\{-۱,۴,-۹,۱۶,\dots\}$

$C=\{۱,۱۱,۱۱۱,\dots\}$ $\quad$ $D=\{۰,۲,۸,۲۶,\dots\}$

$E=\left\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۱۲},\dots\right\}$ $\quad$ $F=\{-۷,-۲,۳,۸,\dots,۱۰۳\}$

$G=\left\{\frac{۱}{۳۲},\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۲},۲,\dots,۱۲۸\right\}$ $\quad$ $H=\{-۱,۰,۷,۲۶,\dots\}$

$I = \{۷,۸,۱۱,۱۶,۲۳,...\}$ $J = \left\{\frac{۵}{۲},۵,\frac{۱۵}{۲},۱۰,...\right\}$

$K = \left\{-۱,\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۸},...\right\}$ $L = \{۷,۷۷,۷۷۷,...\}$

$M = \{...,-۶,-۱,۴,۹,۱۴,...\}$ $N = \{۱,۳,۶,۱۰,...\}$

$O = \{-۹,-۳,-۱,۱,۳,۹\}$ $P = \{-۱۵,-۹,-۳,...,۵۷\}$

۳. اگر $A = \{\varnothing , \{\varnothing\},\{۱,۲\},۲\}$ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) $\varnothing \in A$ ب) $\{\varnothing\} \subset A$

ج) $\{۱\} \subset A$ د) $\{۲\} \not\subset A$

هـ) $\{\{\varnothing,۲\}\} \subset A$ و) $\{۱,۲\} \subset A$

ز) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\} \in A$ ح) $\{\{\varnothing\},\{۲\}\} \subset A$

۴. همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{۴,\{۵\},\{۴,۵\}\}$ را بنویسید.

۵. یک مجموعه‌ی سه عضوی بسازید که هر عضو آن زیرمجموعه‌ی آن نیز باشد.

۶. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $۴n + ۵$ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $۲n - ۱$ عضوی است؟

۷. اگر به تعداد اعضای یک مجموعه ۵ عضو اضافه کنیم تعداد زیرمجموعه‌های آن چه تغییری می‌کند؟

۸. تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{۵,۶,۷,۸\}$ را بنویسید که عدد ۸ عضو آن‌ها باشد.

۹. تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{۵,۶,۷,۸\}$ را بنویسید که عدد ۸ عضو آن‌ها باشد ولی عدد ۵ عضو آن‌ها نباشد.

۱۰. اگر $B = \{۹,\{۹\},\varnothing\}$ باشد، $P(B)$ را مشخص کنید.

۱۱. مجموعه‌ی $P(P(P(\varnothing)))$ را مشخص کنید.

۱۲. اگر $A = \{۵\}$ باشد $P(P(A))$ را مشخص کنید.

۱۳. درستی و نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر $x \in A$ و $A \in B$ آن‌گاه $x \in B$.

ب) اگر $A \subset B$ و $B \in C$ آن‌گاه $A \in C$.

ج) اگر $A \not\subset B$ و $B \subset C$ آن‌گاه $A \not\subset C$.

د) اگر $x \in A$ و $A \not\subset B$ آن‌گاه $x \notin B$.

۱۴.اگر $A = \{\{\{\varnothing\}\}\}$ و $B = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

$A \in p(B)$ $\qquad$ $A \in p(p(B))$

۱۵.اگر $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, ..., a_n\}$ مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه دارد که شامل $a_۱$ و $a_۲$ باشند، ولی شامل $a_۳$ نباشند.

۱۶.چند مجموعه مانند X می‌توان یافت که داشته باشیم:

$\{۱,۲,۳,۴\} \subset X \subset \{۱,۲,۳,...,۱۰\}$

۱۷. چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,...,۱۵\}$ می‌توان یافت که هریک شامل حداقل یک عدد اول باشد؟

۱۸. در مجموعه‌ی $A = \{۲^{۵۰} - ۱ , ۲^{۵۰}, ۲^{۵۰} + ۱, ..., ۴^{۵۰} + ۱\}$ چند مجذور کامل وجود دارد؟

۱۹.تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k - ۱$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k - ۳$ عضوی ۴۸ واحد بیش‌تر است. عدد طبیعی k را به‌دست آورید.

۲۰.تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $۵k - ۱$ عضوی برابر است با حاصل‌ضرب تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعه‌ی $k + ۵$ عضوی و $۳k - ۲$ عضوی. مقدار k را حساب کنید.

۲۱.تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k + ۱$ عضوی از سه برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k - ۱$ عضوی ۱۶ واحد بیش‌تر است. مقدار k چه‌قدر است؟

۲۲. تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی $۲k$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی ۹۹۱ زیرمجموعه بیش‌تر است. مقدار k را تعیین کنید.

۲۳. به عضوهای مجموعه‌ی A سه عضو جدید اضافه می‌کنیم تا مجموعه‌ی B به‌دست آید. اگر تعداد زیرمجموعه‌های محض B، ۴۴۷ زیرمجموعه بیش‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های A باشد، B چند عضو دارد؟

۲۴. مجموع تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعه‌ی $k+۵$ و $k+۳$ عضوی از مجموع تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعه‌ی $k+۲$ و $k+۱$ عضوی ۲۱۷۶ زیرمجموعه بیش‌تر است. k را تعیین کنید.

۲۵. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k-۳$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی $k+۲$ عضوی ۶۱ واحد کم‌تر است. مقدار k چه‌قدر است؟

۲۶. مجموعه‌ی A دو عضو بیش‌تر از مجموعه‌ی B دارد. در صورتی‌که مجموع تعداد زیرمجموعه‌های این دو مجموعه ۸۰ باشد، تعیین کنید هر کدام چند عضو دارند؟

۲۷. اگر تعداد عضوهای B، ۳ واحد کم‌تر از تعداد اعضای A بوده و حاصل‌ضرب تعداد زیرمجموعه‌های A در تعداد زیرمجموعه‌های B برابر ۳۲ باشد، تعداد عضوهای A و B را به دست آورید.

۲۸. یک مجموعه‌ی ۸ عضوی چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی دارد؟ چرا؟

۲۹. یک مجموعه‌ی چهار عضوی بنویسید که هر عضو آن زیرمجموعه‌ی آن نیز باشد.

۳۰. اگر $A \subset B$ باشد، ثابت کنید $P(A) \subset P(B)$.

۳۱. همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{\{۲\},۲,\{۲,۲\}\}$ را بنویسید.

۳۲. اگر $B = \{\{۵\},\{۵,۵,۵\}\}$، $p(p(B))$ را مشخص کنید.

۳۳. اگر $A = \{\{۱,۲,۳,...,۲۰\}\}$، $p(A)$ چند زیر مجموعه دارد؟

۳۴. اگر $A = \{۳k-۱ | k \in z\}$ و $B = \{۳k+۲ | k \in z\}$ اعضای A و B را بنویسید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳۵. به ازای چه مقادیری از a و b دو مجموعه‌ی $\{a, a^۲\}$ و $\{۱, b, b^۲\}$ مساویند؟

۳۶. اگر دو مجموعه‌ی $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$ و $B=\{\{c\},\{c,d\}\}$ مساوی باشند، درباره‌ی a، b، c و d چه می‌توان گفت؟

۳۷. اگر $A_۱ \subset A_۲ \subset A_۳ \subset ... \subset A_n \subset A_۱$ ثابت کنید $A_۱ = A_۲ = ... = A_n$.

۳۸. به ازای چه مقادیری از a و b دو مجموعه‌ی A و B مساویند؟

$$A=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$$
$$B=\{\{۲,۳\},\{۲\},\{۳,۲\},\{۲,۳,۱,۲\}\}$$

۳۹. اگر دو مجموعه‌ی $A=\{۲^x \mid x \in Z\}$ و $B=\{۳^y \mid y \in Z\}$ مساوی باشند، مقادیر x و y را حساب کنید.

۴۰. آیا از $A \neq B$ می‌توان نتیجه گرفت $A \not\subset B$؟ چرا؟

۴۱. اگر $M=\{x \mid x \in Z, x > -۱۳\}$ و $A=\{x \mid x \in Z, x > -۷\}$ باشد، A' را مشخص کنید.

۴۲. اگر $M=\{۵k \mid k \in Z\}$ و $B=\{۱۰k \mid k \in Z\}$ باشد، B' را مشخص کنید.

۴۳. اگر $M=\{۲^x \mid x \in Z\}$ و $A=\{۴^x \mid x \in Z\}$ مجموعه‌ی A' را با عضوها و علائم ریاضی بنویسید.

۴۴. اگر $A=\{\{۵,۶\},\{۵,۶,۶\},\{۵,۵,۶\}\}$ باشد $P(P(A))$ را مشخص کنید.

۴۵. اگر $M=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ و $A=\{۱,۴,۷\}$ و $B=\{۲,۳,۷\}$ باشد، حاصل $(A \cup B)'$ و $A' \cap B'$ و $A' \cup B'$ و $A' \cap B'$ را با عضوهایشان مشخص کنید.

۴۶. اگر $A=\{x \mid x \in Z, x > -۱۰\}$ و $B=\{x \mid x \in Z, -۲ < x < ۳۰\}$ باشد، $A \cup B$ و $A \cap B$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

۴۷. اگر $A=\{۵,\{۷\},۷\}$ و $B=\{\{۵\},۷,۵\}$ باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ را مشخص کنید.

۴۸. اگر $C=\{x \mid x<۱۵\}$ و $D=\{x \mid x>-۱۷\}$ باشند $A\cup B$ و $A\cap D$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

۴۹. کدام‌یک از تساوی‌های زیر درست است؟

الف) $\left\{x \mid x\in Z \ ,\ \frac{x}{۱۲}\in Z\right\}=\{۱۲x \mid x\in Z\}$

ب) $\left\{x \mid x\in Z \ ,\ \frac{۲۴}{x}\in Z\right\}=\{۲۴x \mid x\in Z\}$

ج) $\{۲x \mid x\in Z\}=\{۲x+۶ \mid x\in Z\}$

د) $\{۴x-۱ \mid x\in Z\}=\{۴x+۳ \mid x\in Z\}$

۵۰. اگر $A=\{۳k \mid k\in Z\}$ و $B=\{۳k+۱ \mid k\in Z\}$ و Z مجموعه‌ی مرجع باشد، حاصل $(A\cup B)'$ را مشخص کنید.

۵۱.اگر Z مجموعه‌ی مرجع و $A=\{x \mid x\in Z \ ,\ x>۷\}$، $B=\{x \mid x\in Z \ ,\ x\leq ۷\}$ حاصل $A'\cap B'$را مشخص کنید.

۵۲. طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $(A\cup A')\cup(B\cap B')'$

ب) $(A\cup\varnothing')'\cap(A\cap M')'$

ج) $(A\cup B')\cup(A'\cap B)$

د) $A\cup(A\cap B\cap C)$

۵۳. اگر:

$M=\{۳k+۲ \mid k\in N \ ,\ ۱\leq k\leq ۷\}$ و $A=\{۳k-۱ \mid k\in N \ ,\ ۴\leq k\leq ۷\}$ و $B=\{۱۴,۱۷,۲۰\}$ و $C=B'\cap A$ حاصل عبارت $(A\cup B)'\cap C'$ چیست؟

۵۴. اگر Z مجموعه‌ی مرجع و:

$A\cup B'=\{x \mid x\in Z \ ,\ x^{۲}>۲۵\}$، مجموعه‌ی $A'\cap B'$ را با عضوهایش مشخص کنید.

۵۵. اگر $A=\{x \mid x\in Z\ ,\ x>۵\}$ و $B=\{x \mid x\in Z\ ,x<-۵\}$ هریک از مجموعه‌های زیر را با عضوها مشخص کنید $(M=Z)$.

الف) $A'\cup B$ ب) $A'\cap B'$

۵۶. اگر:

$A\cap B=\{x \mid x\in Z\ ,\ -۱\le x<۵\}$ و $A\cap C=\{x \mid x\in Z\ ,\ -۳<x<۳\}$

حاصل $A\cap(B\cup C)$ کدام است؟

۵۷. اگر $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$ و $A\cup B'=\{a,b,c,f\}$ اعضای مجموعه‌ی A را تعیین کنید.

۵۸. اگر $A=\{x \mid x\in R\ ,\ x\ge ۳\}$ مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ و $A'\cap B'$ را مشخص کنید.

۵۹. اگر:

$A=\{x \mid x\in Z\ ,\ -۱۰۰<x<۲۰\}$ و $B=\{x \mid x\in Z\ ,\ -۵۰<x<۴۰\}$ و $C=\{x \mid x\in Z\ ,\ -۱۰<x<۵۰\}$ باشد، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $A\cap B=$ ب) $A\cap C=$

ج) $A\cap B\cap C=$ د) $A\cup B\cup C=$

۶۰. اگر:

$A=\{x \mid -۷<x<۷\}$ و $B=\{x \mid -۱۰<x<۱۰\}$ و $C=\{x \mid -۱۵<x<۱۵\}$

باشد، مجموعه‌های $A\cap C$، $B\cup C$ و $A\cap B\cap C$ و $A\cup B\cup C$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

۶۱.اگر N مجموعه‌ی مرجع:

$A'=\{x \mid x\in N\ ,\ x<۱۰\}$ و $B'=\{x \mid x\in N\ ,\ x<۱۵\}$

باشد، $A\cup B$ و $A\cap B$ را مشخص کنید.

۶۲. اگر $A\cup B=\{x \mid -۹<x<۱۱\}$ و $A\cup C=\{x \mid -۱۲<x<۸\}$ باشد، حاصل $A\cup(B\cap C)$ را تعیین کنید.

۶۳. اگر $B \cap C = \varnothing$ حاصل $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ چیست؟

۶۴. اگر $B - C = B'$ ثابت کنید $(B \cap C') \cup (B' \cap C) = B'$.

۶۵. اگر A، B و C سه مجموعه باشند و $B \subset A$ و $A \cap C = \varnothing$، حاصل $(B' \cap A') \cup C$ چیست؟

۶۶. اگر A و B جدا از هم باشند، حاصل $(A' \cup B) \cap A$ چیست؟

۶۷. اگر $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ و $A \cap B = \{b, c, d\}$ و بدانیم $a \notin A - B$ و $e \notin B - A$ مجموعه‌های A و B را مشخص کنید.

۶۸. درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A \cap B') \cap (A' \cap B) = \varnothing$

ب) $(C \cap D) \cup C' = D \cup C'$

ج) $(A \cap B') \cap (A' \cup B) = \varnothing$

د) $B \cup (A \cup B')' = B$

۶۹. اگر $A = \{x | x \in Z \ , x < -۹\}$ و $B = \{x | x \in Z \ , x < -۱۴\}$ باشد $A - B$ و $B - A$ را مشخص کنید.

۷۰. اگر:

$M = \{\varnothing, \{۳, ۴\}, \{۴, ۵\}, \{۳, ۴, ۵\}\}$ و $A = \{\{۳, ۴, ۵\}, \varnothing\}$ و $B = \{\{۳, ۴\}, \varnothing\}$

طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $A - (B \cap A') =$

ب) $(B - A)' =$

ج) $A - (B - A) =$

د) $A' \cup [(B - A) - A] =$

۷۱. اگر:

$A \cap B = \{x, y\}$ و $A - B = \{z, t\}$ و $B - A = \{v, u\}$

مجموعه‌ی $A \cup B$ برابر چه مجموعه‌هایی می‌تواند باشد؟

۷۲. اگر $A_n = \left\{x \middle| x \in R \ , \ \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$، طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\bigcup_{i=1}^{100} A_i =$

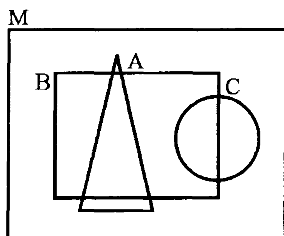
ب) $\bigcap_{i=1}^{100} A_i =$

ج) $(A_{10} \cup A_8) \cup A_9 =$

د) $(A_{10} - A_5) - A_7 =$

۷۳. پنج مجموعه‌ی نامتناهی نام ببرید که دو به دو جدا از هم بوده و اجتماعشان برابر Z شود.

۷۴. در شکل زیر $(A' \cap C) - B$ را سایه بزنید.



۷۵. اگر A و B دو مجموعه باشند، متمم $\left[A - (A - B)\right] \cup \left[A - (B - A)\right]$ را به‌دست آورید.

۷۶. اگر A و B دو مجموعه باشند متمم $(B' - A) \cup (A' - B)$ چیست؟

۷۷. درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ب) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

ج) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

د) $\left[A \cap (A' \cup B)\right] \cup \left[B \cap (A' \cup B')\right] = B$

هـ) $(B \cup C) - (C \cup D) = (B - C) - D$

و) $(A \cap B) - (A \cap B') = A \cap B$

ز) $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C) = C$

ح) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

ط) $A' - B = B' - A$

ی) $(A' - B) \cup (B' \cup A)' = A'$

ک) $(A' \cup B') \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B) = B - A$

۷۸. طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $(A \cap B \cap C) \cup (A - C) \cup (A \cap B') =$

ب) $[A \cup (A \cap B)]' \cap [B \cap (B \cup A)]' \cap [(A \cup A) - A] =$

ج) $[(A \cap M) \cup (A \cap B')] \cap [(A' \cap M) \cup (A' \cap B)] =$

د) $(A - B) \cap (B - A) =$

هـ) $[(A \cup B) - A'] \cup [B' \cap (A \cup B)] =$

و) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] =$

ز) $\left[(A' - M)' - A\right]' =$

ح) $\left[(\varnothing - A)' \cap (A - \varnothing)'\right]' - \left[(\varnothing \cup A') - (A' \cap \varnothing)'\right]' =$

ط) $\left[(A \cup M')' \cap A\right]' - \left[(A \cap M')' - A'\right]' =$

ی) $(A - B) \cup [B \cap (A \cup B)] =$

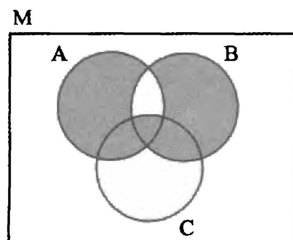
۷۹. اگر $A_۱ = \{۰,۲\}$ و $A_۲ = \{۱,۳\}$ و $A_۳ = \{۰,۲,۴\}$ و $A_۴ = \{۱,۳,۵\}$ و ... :

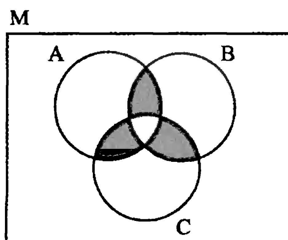
اولاً: $A_{۱۳۷۹}$ و $A_{۲۰۰۰}$ را با عضوها مشخص کنید.

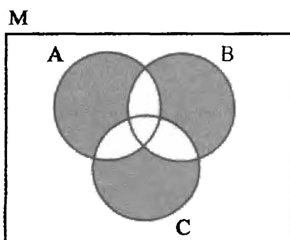
ثانیاً: $A_۱ \cup A_۲ \cup ... \cup A_{۱۰۱} = ?$ و $A_۱ \cap A_۲ \cap ... \cap A_{۱۱۱} = ?$

ثالثاً: مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن به $A_{۵۰}$ تعلق داشته ولی به $A_{۲۶}$ تعلق نداشته باشد.

۸۰. در هر یک از شکل‌های زیر، مجموعه‌ای را که نمودار آن سایه زده شده بنویسید.







۸۱. ثابت کنید اگر $A \subset B \subset C$ آن‌گاه $A \cup B = B \cap C$.

۸۲. ثابت کنید اگر $A = B - A$ آن‌گاه $B - A = B$.

۸۳. اگر $A \cup B = A - B$ ثابت کنید $B = \varnothing$.

۸۴. اگر $A \cap B = \varnothing$ نشان دهید $A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$.

۸۵. اگر $A \cup B = A \cap B$ ثابت کنید $A = B$.

۸۶. اگر $A \subset B$ و $A \subset B'$ ثابت کنید $A = \varnothing$.

۸۷. برای سه مجموعه‌ی A ، B و C ثابت کنید:

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subset A$$

۸۸. اگر مجموعه‌های A، B و C دو به دو جدا از هم باشند حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$[(A \cup B) \cap C] \cap [(A \cup C) \cap B] \cap [(B \cup C) \cap A]$$

۸۹. از $A \cap B = A \cap C$ و $B - A = C - A$ نتیجه بگیرید: $B = C$.

۹۰.از $A \cup B = C$ و $A \cap B = \varnothing$ نتیجه بگیرید: $A = C - B$.

۹۱.با استفاده از قوانین مجموعه‌ها درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

ب) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

ج) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - c)$

د) $(A - B) - C = (A - C) \cap (A - B)$

هـ) $[(A - B) \cup (B - A)] \cap (A \cap B) = \varnothing$

و) $A \Delta (A \cap B) = A - B$

۹۲. عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $\left[\left[(M - A')' - A'\right]' - A\right]' - \varnothing'$

ب) $[[(\varnothing' - A)' - (M' \cup A)']' - [(M' \cup A)' \cup (\varnothing' \cap A')']']'$

۹۳. اگر $A \Delta B = \varnothing$ ثابت کنید $A = B$.

۹۴. ثابت کنید:

الف) $\left(A \Delta B\right) \cap A = A - B$ ب) $\left(A \Delta B\right) \cup A = A \cup B$

۹۵. درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

الف) $A \Delta \left(A \Delta B\right) = B$ ب) $A \cup B = M \Leftrightarrow A \Delta B = A' \cup B'$

ج) $A \cap B = M \Rightarrow A \Delta B = \varnothing$ د) $A \cup B = \varnothing \Rightarrow A \Delta B = \varnothing$

۹۶. اگر $A_n = \left\{x \mid n \in N \ , \ 0 \le x \le \frac{1}{n}\right\}$، حاصل عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{10}$ ب) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{100}$

۹۷. ۲۵ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس در امتحان فیزیک و ۳۱ نفر در امتحان شیمی قبول شده‌اند. اگر ۴۲ نفر در فیزیک یا شیمی قبول شده باشند، چند نفر در هر دو امتحان قبول شده‌اند؟

۹۸. در یک کلاس ۳۰ نفری همه‌ی دانش‌آموزان فوتبال یا والیبال بازی می‌کنند. اگر ۱۲ نفر والیبال و ۸ نفر فوتبال و والیبال بازی کنند، چند نفر فوتبال بازی می‌کنند؟ چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

۹۹. اگر A، B و C سه مجموعه‌ی متناهی باشند، ثابت کنید:

$$n\left(A \cup B \cup C\right) = n(A) + n(B) + n(C) - n\left(A \cap B\right) - n\left(A \cap C\right)$$
$$-n\left(B \cap C\right) + n\left(A \cap B \cap C\right)$$

۱۰۰. در یک کلاس ۳۴ نفره، ۲ نفر از دانش‌آموزان به هیچ‌یک از رشته‌های فوتبال، والیبال و بسکتبال علاقه ندارند. ۱۵ نفر به فوتبال، ۱۸ نفر به والیبال، ۱۶ نفر به بسکتبال، ۷ نفر به فوتبال و والیبال، ۸ نفر به والیبال و بسکتبال و ۴ نفر به فوتبال و بسکتبال علاقه‌مند هستند. تعداد دانش‌آموزانی را مشخص کنید که:

الف) به هر سه رشته علاقه دارند. ب) فقط به فوتبال علاقه دارند.

ج) فقط به والیبال علاقه دارند. د) فقط به بسکتبال علاقه دارند.

هـ) به فوتبال علاقه دارند ولی به والیبال علاقه ندارند.

و) به والیبال علاقه دارند ولی به بسکتبال علاقه ندارند.

ز) فقط به یک رشته‌ی ورزشی علاقه دارند.

ح) به حداقل دو رشته‌ی ورزشی علاقه دارند.

۱۰۱. یک کارخانه‌ی سازنده‌ی خودرو قبل از تحویل خودرو به مشتریان تعداد ۱۰۰ نمونه از آن‌را به‌طور تصادفی انتخاب کرده و مورد بازدید فنی قرار داده است. در این بررسی ملاحظه گردید ۴۲ خودرو فاقد نقص فنی، ۲۳ خودرو دارای نقص فرمان، ۲۶ خودرو نقص چراغ، ۳۲ خودرو نقص موتور، ۹ خودرو نقص فرمان و چراغ، ۱۰ خودرو نقص فرمان و موتور و ۱۲ خودرو نقص چراغ و موتور دارند.

اولاً: تعداد خودروهایی که هر سه نقص را دارند مشخص کنید.

ثانیاً: تعداد خودروهایی را که فقط یک نقص دارند بیابید.

۱۰۲. در مورد بسته بودن هریک از مجموعه‌های زیر نسبت به اعمال جمع و ضرب تحقیق کنید.

$A=\{5x \mid x\in Z\}$ $\qquad$ $B=\{-2a+1 \mid a\in Z\}$

$C=\{n^2 \mid n\in Z\}$ $\qquad$ $D=\{4,9,14,19,\dots\}$

$E=\{5,25,125,\dots\}$ $\qquad$ $F=\{2^{2x-1} \mid x\in Z\}$

$G=\{x+y\sqrt{3} \mid x,y\in Q-\{0\}\}$ $\qquad$ $H=\{\sqrt{2}x+1 \mid x\in Z\}$

$I=R-Q$ $\qquad$ $J=\{a\sqrt{2}+b \mid a,b\in Q\}$

۱۰۳. یک مجموعه‌ی تک عضوی بسازید که نسبت به جمع و تفریق و ضرب بسته باشد.

۱۰۴. یک مجموعه‌ی دو عضوی بسازید که نسبت به ضرب و تقسیم بسته باشد ولی نسبت به جمع و تفریق بسته نباشد.

۱۰۵. چه عضوی را به مجموعه‌ی $A=\{\dots,-4,-2,2,4,\dots\}$ اضافه کنیم تا مجموعه‌ی حاصل نسبت به جمع بسته باشد؟ آیا A نسبت به ضرب بسته است؟

۱۰۶. آیا مجموعه‌ی $A=\{-1,0,1\}$ نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است؟ نسبت به تفریق و تقسیم چه‌طور؟

☞ فصل سوم

توان

مفهوم توان و قوانین محاسبه‌ی توان‌ها را در دوره‌ی راهنمایی فرا گرفته‌اید. در این فصل ضمن یادآوری، به تکمیل آن می‌پردازیم:

$$a^m = \underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{\text{بار } m}\,(m\in\mathbb{N})$$

قوانین محاسبه‌ی اعداد توان‌دار

۱- در ضرب اعداد توان‌دار اگر پایه‌ها مساوی و نماها مختلف باشند یکی از پایه‌ها را نوشته و نماها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\boxed{a^m\times a^n = a^{m+n}}$$

$$a^m\times a^n = \underbrace{(a\times a\times\ldots\times a)}_{\text{بار } m}\times\underbrace{(a\times a\times\ldots\times a)}_{\text{بار } n} = \underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{\text{بار } m+n} = a^{m+n}$$

۲- در ضرب اعداد توان‌دار اگر نماها مساوی و پایه‌ها مختلف باشند، یکی از نماها را نوشته و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\boxed{a^m\times b^m = (a\times b)^m}$$

$$a^m\times b^m = \underbrace{(a\times a\times a\times\ldots\times a)}_{\text{بار } m}\times\underbrace{(b\times b\times b\times\ldots\times b)}_{\text{بار } m} =$$

$$\underbrace{(a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b)\times\ldots\times(a\times b)}_{m\ \text{بار}}=(a\times b)^m$$

۳-در ضرب اعداد توان‌دار اگر هم پایه‌ها و نماها مساوی باشند، به یکی از دو روش قبل عمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} a^m\times a^m=a^{m+m}=a^{۲m} \\ a^m\times a^m=(a\times a)^m=(a^۲)^m \end{array}\right\}\Rightarrow (a^۲)^m=a^{۲m}$$

۴-در تقسیم اعداد توان‌دار اگر پایه‌ها مساوی و نماها مختلف باشند یکی از پایه‌ها را نوشته و نماها را از هم کم می‌کنیم.

$$\boxed{a^m\div a^n=a^{m-n}\quad (m>n)}$$

$$a^m\div a^n=\frac{a^m}{a^n}=\frac{\overbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}^{m\ \text{بار}}}{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\ \text{بار}}}=\underbrace{a\times a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m-n}=a^{m-n}$$

۵-در تقسیم اعدد توان‌دار اگر نماها مساوی و پایه‌ها مختلف باشند یکی از نماها را نوشته و پایه‌ها را برهم تقسیم می‌کنیم.

$$\boxed{a^m\div b^m=\left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

$$a^m\div b^m=\frac{a^m}{b^m}=\frac{\overbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}^{m\ \text{بار}}}{\underbrace{b\times b\times b\times\ldots\times b}_{m\ \text{بار}}}=\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)\times\ldots\times\left(\frac{a}{b}\right)}_{m\ \text{بار}}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$$

۶-در تقسیم اعداد توان‌دار اگر هم پایه‌ها و هم نماها مساوی باشند، به یکی از دو روش قبل عمل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} a^m\div a^m=a^{m-n}=a^۰ \\ a^m\div a^m=\left(\frac{a}{a}\right)^m=۱^m=۱ \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a^۰=۱}\qquad (a\neq ۰)$$

مثال ۱ : حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $(۲/۵)^{۷}\times\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳}$

ب) $۳^{۷}\times ۳\times ۳^{۴}$

ج) $۸^{۱۱}\times\left(\frac{۵}{۸}\right)^{۱۱}$

د) $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۸}\times ۶^{۸}\times ۲^{۸}$

هـ) $(۰/۷۵)^{۱۰}\div\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۷}$

و) $\left[۱۲^{۹}\div\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۹}\right]\div ۶^{۹}$

ز) $۱۰^{۱۷}\div(۰/۵)^{۱۷}$

ح) $۷^{۱۰}\div\left(۲\frac{۱}{۳}\right)^{۱۰}$

ط) $\frac{۵^{۷}\times ۵^{۳}}{۵^{۶}\times ۵}$

ی) $\frac{\left(۸^{۷}\times ۳^{۷}\right)\div ۲۴^{۲}}{\left(۲^{۳}\div ۰/۲۵^{۳}\right)\times ۳^{۳}}$

ک) $۵^{۷}\times ۶^{۵}\times ۱۲^{۷}\times ۱۰^{۵}$

ل) $\frac{۱۲^{۲}\times ۳^{۳}}{۳^{۱۰}\times ۱۲^{۵}}$

حل:

الف) $(۲/۵)^{۷}\times\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳}=(۲/۵)^{۱۰}$

ب) $۳^{۷}\times ۳\times ۳^{۴}=۳^{۱۲}$

ج) $۸^{۱۱}\times\left(\frac{۵}{۸}\right)^{۱۱}=\left(۸\times\frac{۵}{۸}\right)^{۱۱}=۵^{۱۱}$

د) $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۸}\times ۶^{۸}\times ۲^{۸}=\left(\frac{۲}{۳}\times ۶\times ۲\right)^{۸}=۸^{۸}$

هـ) $(۰/۷۵)^{۱۰}\div\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۷}=\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}$

و) $\left[۱۲^{۹}\div\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۹}\right]\div ۶^{۹}=\left(۱۲\times\frac{۳}{۲}\right)^{۹}\div ۶^{۹}=۱۸^{۹}\div ۶^{۹}=۳^{۹}$

ز) $۱۰^{۱۷} \div (۰/۵)^{۱۷} = (۱۰ \div ۰/۵)^{۱۷} = ۲۰^{۱۷}$

ح) $۷^{۱۰} \div \left(۲\frac{۱}{۳}\right)^{۱۰} = \left(۷ \div \frac{۷}{۳}\right)^{۱۰} = \left(۷ \times \frac{۳}{۷}\right)^{۱۰} = ۳^{۱۰}$

ط) $\frac{۵^{۷} \times ۵^{۳}}{۵^{۶} \times ۵} = \frac{۵^{۱۰}}{۵^{۷}} = ۵^{۳}$

ی) $\frac{(۸^{۷} \times ۳^{۷}) \div ۲۴^{۲}}{(۲^{۳} \div ۰/۲۵^{۳}) \times ۳^{۳}} = \frac{۲۴^{۷} \div ۲۴^{۲}}{۸^{۳} \times ۳^{۳}} = \frac{۲۴^{۵}}{۲۴^{۳}} = ۲۴^{۲}$

ک) $۵^{۷} \times ۶^{۵} \times ۱۲^{۷} \times ۱۰^{۵} = (۵ \times ۱۲)^{۷} \times (۶ \times ۱۰)^{۵} = ۶۰^{۷} \times ۶۰^{۵} = ۶۰^{۱۲}$

ل) $\frac{۱۲^{۱۲} \times ۳^{۳}}{۳^{۱۰} \times ۱۲^{۵}} = \frac{۱۲^{۷}}{۳^{۷}} = ۴^{۷}$

نکته: اگر عدد منفی به توان فرد برسد حاصل عددی منفی و اگر عدد منفی بـه تـوان زوج برسد حاصل عددی مثبت است.

$$\boxed{(-a)^{۲k} = a^{۲k}} \qquad \boxed{(-a)^{۲k+۱} = -a^{۲k+۱}} \quad (k \in Z)$$

$(-۱)^{۱۰۰} = ۱ \qquad (-۱)^{۱۰۱} = -۱$

مثال ۲ : حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $(-۵)^{۱۰} \times ۵^{۶}$

ب) $\frac{(-۵)^{۱۱} \times ۵^{۴}}{۵^{۳} \times (-۵)^{۷}}$

حل:

الف) $(-۵)^{۱۰} \times ۵^{۶} = ۵^{۱۰} \times ۵^{۶} = ۵^{۱۶}$

$$\frac{(-۵)^{۱۱} \times ۵^{۴}}{۵^{۳} \times (-۵)^{۷}} = \frac{-۵^{۱۱} \times ۵^{۴}}{۵^{۳} \times (-۵^{۷})} = \frac{-۵^{۱۵}}{-۵^{۱۰}} = ۵^{۵}$$

۷-توان یک توان

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \ldots \times a^m}_{n \text{ بار}} = a^{\overbrace{m+m+m+\ldots+m}^{n \text{ بار}}} = a^{mn}$$

مثال ۳ :

الف) $(۲^۳)^۴ = ۲^{۳\times۴} = ۲^{۱۲}$

ب) $\left[(۲/۵)^۲\right]^۳ = (۲/۵)^{۳\times۲} = (۲/۵)^۶$

ج) $\left[\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲\right]^۰ = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۰ = ۱$

د) $۲۵^۵ = (۵^۲)^۵ = ۵^{۱۰}$

مثال ۴ : حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $۱۶^۷ \times ۸^۵$

ب) $۲۵^{۱۱} \div ۱۲۵^۲$

ج) $\frac{۲۷^۲ \times ۹^۵}{۸۱^۳ \times ۳^۲}$

د) $\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۷ \times ۲^{۲۰}}{۴^۳ \times ۸^۲}$

هـ) $\frac{\left(\frac{۲}{۵}\right)^۷ \times \left(\frac{۴}{۲۵}\right)^۴}{\left(\frac{۸}{۱۲۵}\right)^۲ \times \left(\frac{۴}{۱۰}\right)^۴}$

و) $\frac{۱۶^۷ \times ۱۲۵^۲}{۲۵^۳ \times ۳۲^۴}$

حل:

الف) $۱۶^۷ \times ۸^۵ = (۲^۴)^۷ \times (۲^۳)^۵ = ۲^{۲۸} \times ۲^{۱۵} = ۲^{۴۳}$

ب) $۲۵^{۱۱} \div ۱۲۵^۲ = (۵^۲)^{۱۱} \div (۵^۳)^۲ = ۵^{۲۲} \div ۵^۶ = ۵^{۱۶}$

ج) $\frac{۲۷^۲ \times ۹^۵}{۸۱^۳ \times ۳^۲} = \frac{(۳^۳)^۲ \times (۳^۲)^۵}{(۳^۴)^۳ \times ۳^۲} = \frac{۳^۶ \times ۳^{۱۰}}{۳^{۱۲} \times ۳^۲} = \frac{۳^{۱۶}}{۳^{۱۴}} = ۳^۲$

د) $\dfrac{\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^{۷}\times ۲^{۲۰}}{۴^{۳}\times ۸^{۲}}=\dfrac{\dfrac{۱}{۲^{۷}}\times ۲^{۲۰}}{(۲^{۲})^{۳}\times(۲^{۳})^{۲}}=\dfrac{۲^{۱۳}}{۲^{۶}\times ۲^{۶}}=\dfrac{۲^{۱۳}}{۲^{۱۲}}=۲$

هـ) $\dfrac{\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۷}\times\left(\dfrac{۴}{۲۵}\right)^{۴}}{\left(\dfrac{۸}{۱۲۵}\right)^{۲}\times\left(\dfrac{۴}{۱۰}\right)^{۴}}=\dfrac{\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۷}\times\left[\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۲}\right]^{۴}}{\left[\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۳}\right]^{۲}\times\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۴}}=\dfrac{\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۷}\times\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۸}}{\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۶}\times\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۴}}=\dfrac{\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۱۵}}{\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۱۰}}=\left(\dfrac{۲}{۵}\right)^{۵}$

و) $\dfrac{۱۶^{۷}\times ۱۲۵^{۲}}{۲۵^{۳}\times ۳۲^{۴}}=\dfrac{(۲^{۴})^{۷}\times(۵^{۳})^{۲}}{(۵^{۲})^{۳}\times(۲^{۵})^{۴}}=\dfrac{۲^{۲۸}\times ۵^{۶}}{۵^{۶}\times ۲^{۲۰}}=\dfrac{۲^{۲۸}}{۲^{۲۰}}=۲^{۸}$

مثال ۵ : حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $۵^{۱۲}\times ۲^{۱۸}$ **ب) $۲^{۲۲}\times ۳^{۳۳}$**

حل:

الف) $۵^{۱۲}\times ۲^{۱۸}=(۵^{۲})^{۶}\times(۲^{۳})^{۶}=۲۵^{۶}\times ۸^{۶}=۲۰۰^{۶}$

ب) $۲^{۲۲}\times ۳^{۳۳}=(۲^{۲})^{۱۱}\times(۳^{۳})^{۱۱}=۴^{۱۱}\times ۲۷^{۱۱}=۱۰۸^{۱۱}$

نکته:

$$(a^{m})^{n}\neq a^{m^{n}}$$

مثال ۶ :

الف) $(۱۰^{۲})^{۳}=۱۰^{۶}$ **ب) $۱۰^{۲^{۳}}=۱۰^{۸}$**

ج) $\left[(۱۰^{۲})^{۳}\right]^{۲}=۱۰^{۲\times۳\times۲}=۱۰^{۱۲}$ د) $۱۰^{۲^{۳^{۲}}}=۱۰^{۲^{۹}}=۱۰^{۵۱۲}$

نکته: می‌دانیم $(a^{m})^{n}=(a^{n})^{m}$ ولی $a^{m^{n}}\neq a^{n^{m}}$.

مثال ۷ : اگر $5^a = 10$ حاصل عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) 5^{a+1} ب) 5^{a-1} ج) 125^a د) 25^{a-1}

حل:

الف) $5^{a+1} = 5^a \times 5 = 10 \times 5 = 50$

ب) $5^{a-1} = 5^a \div 5 = 10 \div 5 = 2$

ج) $125^a = (5^3)^a = (5^a)^3 = 10^3 = 1000$

د) $25^{a-1} = 25^a \div 25 = (5^2)^a \div 25 = (5^a)^2 \div 25 = 10^2 \div 25 = 4$

۸-توان منفی:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \qquad (a \neq 0)$$

فرض کنیم m عددی مثبت باشد:

$$\left.\begin{aligned} a^0 \div a^m &= a^{0-m} = a^{-m} \\ a^0 \div a^m &= 1 \div a^m = \frac{1}{a^m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

مثال ۸ :

الف) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

ب) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{27}{8}$

ج) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

د) $(-1)^{-1} = \frac{1}{(-1)^1} = -1$

-۹

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

مثال ۹ : حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $\left(\frac{۲}{۵}\right)^{-۷} \times \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳} \times \left(\frac{۴}{۲۵}\right)^{۴}$

ب) $(۰/۲)^{۳} \times ۱۲۵^{۲}$

ج) $\frac{(۰/۲۵)^{-۲} \times ۸^{۴}}{(۰/۱۲۵)^{۳} \times ۲^{-۱}}$

د) $\frac{(۰/۰۴)^{۲} \times ۶۲۵^{-۲}}{\left(\frac{۱}{۵}\right)^{-۴} \times (۰/۰۰۸)^{۳}}$

حل:

الف) $\left(\frac{۲}{۵}\right)^{-۷} \times \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳} \times \left(\frac{۴}{۲۵}\right)^{۴} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۷} \times \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳} \times \left(\frac{۲}{۵}\right)^{۸} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۷} \times \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳} \times \left(\frac{۵}{۲}\right)^{-۸}$

$= \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۲}$

ب) $(۰/۲)^{۳} \times ۱۲۵^{۲} = ۵^{-۳} \times (۵^{۳})^{۲} = ۵^{-۳} \times ۵^{۶} = ۵^{۳}$

ج) $\frac{(۰/۲۵)^{-۲} \times ۸^{۴}}{(۰/۱۲۵)^{۳} \times ۲^{-۱}} = \frac{۴^{۲} \times ۸^{۴}}{۸^{-۳} \times ۲^{-۱}} = \frac{۲^{۴} \times ۲^{۱۲}}{۲^{-۹} \times ۲^{-۱}} = \frac{۲^{۱۶}}{۲^{-۱۰}} = ۲^{۱۶-(-۱۰)} = ۲^{۲۶}$

د) $\frac{(۰/۰۴)^{۳} \times ۶۲۵^{-۳}}{\left(\frac{۱}{۵}\right)^{-۴} \times (۰/۰۰۸)^{۲}} = \frac{۲۵^{-۳} \times ۶۲۵^{-۳}}{۵^{۴} \times ۱۲۵^{-۲}} = \frac{۵^{-۶} \times ۵^{-۱۲}}{۵^{۴} \times ۵^{-۶}} = \frac{۵^{-۱۲}}{۵^{۴}} = ۵^{-۱۶}$

نکته:

$$\frac{a^m}{b^n} = a^m \div b^n = a^m \times b^{-n}$$

مثال ۱۰ :

الف) $۱۰^{۵} \div ۲^{-۵} = ۱۰^{۵} \times ۲^{۵} = ۲۰^{۵}$

ب) $\frac{۲^{۷} \div ۳^{۲}}{۳^{-۲} \div ۲^{-۳}} = \frac{۲^{۷} \times ۳^{-۲}}{۳^{-۲} \times ۲^{۳}} = \frac{۲^{۷}}{۲^{۳}} = ۲^{۴}$

۱۰- جمع و تفریق‌ها:

مثال ۱۱ : حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد تواندار بنویسید.

الف) $۲^{۱۰۰}+۲^{۱۰۰}$

ب) $۲۷^{۱۱}+۲۷^{۱۱}+۲۷^{۱۱}$

ج) $۱۵\times ۵^{۲۰}+۱۰\times ۵^{۲۰}$

د) $۷^{۲۰}+۴۲\times ۷^{۱۹}$

هـ) $۱۰\times ۲^{۱۷}+۱۲\times ۲^{۱۶}+۳\times ۲^{۲۱}$

و) $\dfrac{۱۱\times ۹^{-۵}-۸\times ۹^{-۵}}{۴\times ۳^{-۷}+۵\times ۳^{-۷}}$

حل:

الف) $۲^{۱۰۰}+۲^{۱۰۰}=۲\times ۲^{۱۰۰}=۲^{۱۰۱}$

ب) $۲۷^{۱۱}+۲۷^{۱۱}+۲۷^{۱۱}=۳\times ۲۷^{۱۱}=۳\times ۳^{۳۳}=۳^{۳۴}$

ج) $۱۵\times ۵^{۲۰}+۱۰\times ۵^{۲۰}=۲۵\times ۵^{۲۰}=۵^{۲}\times ۵^{۲۰}=۵^{۲۲}$

د) $۷^{۲۰}+۴۲\times ۷^{۱۹}=۷^{۲۰}+۶\times ۷\times ۷^{۱۹}=۷^{۲۰}+۶\times ۷^{۲۰}=۷\times ۷^{۲۰}=۷^{۲۱}$

هـ) $۱۰\times ۲^{۱۷}+۱۲\times ۲^{۱۶}+۳\times ۲^{۲۱}=۵\times ۲^{۱۸}+۳\times ۲^{۲}\times ۲^{۱۶}+۳\times ۲^{۳}\times ۲^{۱۸}$

$=۵\times ۲^{۱۸}+۳\times ۲^{۱۸}+۲۴\times ۲^{۱۶}=۳۲\times ۲^{۱۸}=۲^{۵}\times ۲^{۱۸}=۲^{۲۳}$

و) $\dfrac{۱۱\times ۹^{-۵}-۸\times ۹^{-۵}}{۴\times ۳^{-۷}+۵\times ۳^{-۷}}=\dfrac{۳\times ۹^{-۵}}{۹\times ۳^{-۷}}=\dfrac{۳^{-۹}}{۳^{-۵}}=۳^{-۴}$

۱۱- معادلات توانی:

هر معادله‌ای که مجهول آن در نما قرار گرفته باشد، معادله‌ی توانی نامیده می‌شود. برای حل معادلات توانی ابتدا پایه‌ها را در دو طرف تساوی یکسان می‌کنیم، سپس از این خاصیت استفاده می‌کنیم که «از دو توان مساوی که پایه‌هایشان برابرند، الزاماً نماهایشان نیز برابرند.» (در صورتی‌که پایه‌ها ۰ یا ۱- یا ۱+ نباشند.)

مثال ۱۲ : معادلات توانی زیر را حل کنید.

الف) $۵^{۲x-۶}=۱$

$۵^{۲x-۶}=۵^{۰}\Rightarrow ۲x-۶=۰\Rightarrow ۲x=۶\Rightarrow \boxed{x=۳}$

ب) $۳^{۲x-۱}=۲۷$

$۳^{۲x-۱}=۳^{۳}\Rightarrow ۲x-۱=۳\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow \boxed{x=۲}$

ج) $۳^{x-۱}=۵^{۲x-۲}$

هیچ توانی از ۲ با هیچ توانی از ۵ برابر نیست جز توان صفر

$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1} \\ 2x-2=0 \rightarrow \boxed{x=1} \end{cases}$$

د) $(0/2)^{1-x}=125$

$$5^{x-1}=5^3 \Rightarrow x-1=3 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

هـ) $3^x+3^{x+1}=36$

$$3^x+3\times 3^x=36 \Rightarrow 4\times 3^x=36 \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

و) $\dfrac{27^x\times 9^{x-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}\times 6^x}=2^{-x}$

$$\frac{3^{3x}\times 3^{2x-4}}{3^{x-1}\times 2^x\times 3^x}=2^{-x} \Rightarrow \frac{3^{5x-4}}{3^{2x-1}\times 2^x}=2^{-x} \Rightarrow 3^{5x-4}=3^{2x-1}\times 2^0 \Rightarrow$$

$$5x-4=2x-1 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

ز) $\dfrac{25^x+5^{2x-1}}{9^{x-1}+3^{2x-1}}=\dfrac{15}{2}$

$$\frac{5^{2x}+5^{2x-1}}{3^{2x-2}+3^{2x-1}}=\frac{15}{2} \Rightarrow \frac{5^{2x}\left(1+\frac{1}{5}\right)}{3^{2x}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right)}=\frac{15}{2} \Rightarrow \frac{5^{2x}\times\frac{6}{5}}{3^{2x}\times\frac{4}{9}}=\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5^{2x}}{3^{2x}}\times\frac{6\times 9}{5\times 4}=\frac{15}{2} \Rightarrow \frac{5^{2x}}{3^{2x}}\times\frac{27}{10}=\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(5^2)^x}{(3^2)^x}=\frac{15}{2}\times\frac{10}{27} \Rightarrow \frac{25^x}{9^x}=\frac{25}{9} \Rightarrow \left(\frac{25}{9}\right)^x=\frac{25}{9} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

مثال ۱۳ : تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k+3$ عضوی ۱۱۲ واحد از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی بیش‌تر است. عدد طبیعی k را به‌دست آورید.

حل:

$$2^{k+3} = 2^k + 112$$

$$2^{k+3} - 2^k = 112 \Rightarrow 2^k(2^3 - 1) = 112 \Rightarrow 2^k \times 7 = 112$$

$$\Rightarrow 2^k = 16 \Rightarrow 2^k = 2^4 \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

مثال ۱۴: مجموع تعداد زیرمجموعه‌های سه مجموعه‌ی $k-2$ عضوی و k عضوی و $k+1$ عضوی برابر ۱۰۴ است. تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه چقدر است؟

حل:

$$2^{k-2} + 2^k + 2^{k+1} = 104$$

$$2^k(2^{-2} + 1 + 2) = 104 \Rightarrow 2^k\left(\frac{1}{4} + 3\right) = 104$$

$$\Rightarrow 2^k \times \frac{13}{4} = 104 \Rightarrow 2^k = 104 \times \frac{4}{13} \Rightarrow 2^k = 32$$

$$\Rightarrow 2^k = 2^5 \Rightarrow \boxed{k = 5}$$

$$2^{k-2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8$$

$$2^k = 2^5 = 32$$

$$2^{k+1} = 2^{5+1} = 2^6 = 64$$

تجزیه‌ی اعداد طبیعی به عوامل اول

هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک یا اول است و یا مرکب که آن را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشت. اگر اعداد اول مانند p_1 و p_2 و... و p_n بتوان یافت به طوری‌که $n = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ می‌گوییم عدد n به ضرب عوامل اول تجزیه شده است.

☆ قضیه‌ی بنیادی حساب

هر عدد طبیعی $n > 1$ را می‌توان به عوامل اول تجزیه کرد و این تجزیه بدون درنظر گرفتن ترتیب قرار گرفتن عوامل منحصربه‌فرد است.

لازم به ذکر است که اگر p عددی اول باشد در این صورت خود p تجزیه‌ی p به عوامل اول است.

مثال ۱۵ :

$۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$

$۱۷ = ۱۷$

$۷۲ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳$

اگر در تجزیه‌ی اعداد چند عامل مساوی هم وجود داشته باشد، آن‌ها را به‌صورت توانی می‌نویسیم:

$۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲$

نتیجه: هر عدد طبیعی $n > ۱$ را به‌طور منحصربه‌فردی می‌توان به‌صورت $n = p_۱^{a_۱} \times p_۲^{a_۲} \times ... \times p_n^{a_n}$ نشان داد که در آن a_iها طبیعی و p_i ها اعداد اول متمایزی هستند به‌طوری‌که: $p_۱ < p_۲ < ... < p_n$

که در این صورت عبارت $n = p_۱^{a_۱} \times p_۲^{a_۲} \times ... \times p_n^{a_n}$ را تجزیه‌ی استاندارد n به حاصل‌ضرب عوامل اول می‌نامند. در این بخش هر جا صحبت از تجزیه است منظورمان تجزیه‌ی استاندارد می‌باشد.

مثال ۱۶ : اعداد ۲۴۰ و ۱۲۰۰ را تجزیه کنید.

حل:

۱۲۰۰	۲
	۵
	۲
	۵
۱۲	۲
۶	۲
۳	۳
۱	

$۱۲۰۰ = ۲^۴ \times ۳ \times ۵^۲$

۲۴۰	۲
	۵
۲۴	۲
۱۲	۲
۶	۲
۳	۳
۱	

$۲۴۰ = ۲^۴ \times ۳ \times ۵$

مثال ۱۷ : تجزیه‌ی استاندارد عدد $۱۴۴^۷ \times ۱۵۰^۳$ را بنویسید.

حل:

$$۱۴۴^۷ \times ۱۵۰^۳ = (۲^۴ \times ۳^۲)^۷ \times (۲ \times ۳ \times ۵^۲)^۳ = ۲^{۲۸} \times ۳^{۱۴} \times ۲^۳ \times ۳^۳ \times ۵^۶ = ۲^{۳۱} \times ۳^{۱۷} \times ۵^۶$$

تعریف: یک عدد طبیعی را مجذور کامل (مربع کامل) گوییم، در صورتی‌که در تجزیه‌ی آن به حاصل‌ضرب‌های عامل‌های اول تمام نماها زوج باشند و آن‌را مکعب کامل گوییم در صورتی‌که در تجزیه‌ی آن به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تمام نماها مضربی از ۳ باشند.

مثال ۱۸ :کوچک‌ترین عددی که در عدد ۱۴۰۰ ضرب شود و آن‌را مجذور کامل کند چیست؟

حل:

تجزیه‌ی ۱۴۰۰ به حاصل‌ضرب عامل‌های اول عبارت است از: $۱۴۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲ \times ۷$

با توجه به این‌که توان عامل‌های ۲ و ۷ فردند این عدد را باید در $۱۴ = ۲ \times ۷$ ضرب کنیم تا مجذور کامل شود.

مثال ۱۹ :کوچک‌ترین عدد طبیعی که باید در ۱۰۸۰ ضرب شود تا آن‌را به یک عدد مکعب کامل تبدیل کند چیست؟

حل:

تجزیه‌ی ۱۰۸۰ به حاصل‌ضرب عامل‌های اول عبارت است از: $۱۰۸۰ = ۲^۳ \times ۳^۳ \times ۵$

با توجه به این‌که توان عامل ۵ یک است و بر ۳ بخش‌پذیر نیست، این عدد را باید در $۲۵ = ۵^۲$ ضرب کرد.

☆ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب. م. م)

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که آن‌را با نماد (a,b) نشان می‌دهیم، در واقع بزرگ‌ترین عددی است که a و b بر آن بخش‌پذیرند.

تذکر: در این قسمت هرجا صحبت از a و b است دو عدد طبیعی موردنظر می‌باشند.

☆ محاسبه‌ی ب. م. م دو عدد به کمک تجزیه

در این روش ابتدا اعداد را تجزیه می‌کنیم. سپس از میان عامل‌های مشترک آن توانی را انتخاب می‌کنیم که نمایش کوچک‌تر است. حاصل‌ضرب این عامل‌ها ب. م. م دو عدد است. اگر در تجزیه‌ی اعداد عامل مشترکی وجود نداشته باشد ب. م. م اعداد یک است.

مثال ۲۰ : ب. م. م دو عدد ۷۲۰ و ۲۱۰۰ را حساب کنید.

حل:

$$۷۲۰ = ۲^۴ \times ۳^۲ \times ۵$$
$$۲۱۰۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵^۲ \times ۷$$
$$(۷۲۰ , ۲۱۰۰) = ۲^۲ \times ۳ \times ۵ = ۶۰$$

☆ دو عدد مُتباین (نسبت به هم اول)

دو عدد را که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان یک باشد، دو عدد متباین می‌نامند. به عنوان مثال دو عدد ۷ و ۹ و دو عدد ۸ و ۱۵ متباینند، زیرا:

$$(۷,۹) = ۱ \quad \text{و} \quad (۸,۱۵) = ۱$$

نکته: هر دو عدد اول متمایز نسبت به هم اولند.

نکته: هر دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اولند.

نکته: اگر a و b دو عدد متباین و m و n دو عدد طبیعی باشند، همواره a^m و b^n نسبت به هم اولند.

☆ کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد (ک. م. م)

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b که آن‌را با نماد $[a,b]$ نشان می‌دهیم، در واقع کوچک‌ترین عدد طبیعی است که بر دو عدد a و b بخش‌پذیر است.

☆ محاسبه‌ی ک. م. م دو عدد به کمک تجزیه

در این روش ابتدا اعداد را تجزیه می‌کنیم، سپس از میان عامل‌های مشترک آن توانی که نمایش بزرگ‌تر است و هم‌چنین عامل‌های غیرمشترک را انتخاب کرده در هم ضرب می‌کنیم.

مثال ۲۱ : ک. م. م دو عدد ۱۲۰ و ۷۲ را حساب کنید.

حل:

$$۱۲۰ = ۲^۳ \times ۳ \times ۵$$
$$۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲$$
$$[۱۲۰, ۷۲] = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵ = ۳۶۰$$

نکته: اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند ک. م. م آن‌ها برابر حاصل‌ضربشان است.

نکته: اگر عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$(a,b)=b$ و $[a,b]=a$

مثال ۲۲ : ب. م. م و ک. م. م سه عدد ۷۹۲ و ۱۲۰۰ و ۱۱۲۰ را به کمک تجزیه حساب کنید.

حل:

$$۷۹۲=۲^{۳}\times ۳^{۲}\times ۱۱$$
$$۱۲۰۰=۲^{۴}\times ۳\times ۵^{۲}$$
$$۱۱۲۰=۲^{۵}\times ۵\times ۷$$
$$(۷۹۲\ ,\ ۱۲۰۰\ ,\ ۱۱۲۰)=۲^{۳}=۸$$
$$[۷۹۲\ ,\ ۱۲۰۰\ ,\ ۱۱۲۰]=۲^{۵}\times ۳^{۲}\times ۵^{۲}\times ۷\times ۱۱=۵۵۴۴۰۰$$

مثال ۲۳ : مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو عدد $M=۱۸^{۴}\times ۱۲۵^{a-۵}$ و $N=۹^{b-۲}\times ۲۵^{۲}$ نسبت به هم اول باشند.

حل:

$$M=۱۸^{۴}\times ۱۲۵^{a-۵}=۲^{۴}\times ۳^{۸}\times ۵^{۳a-۱۵}$$
$$N=۹^{b-۲}\times ۲۵^{۲}=۳^{۲b-۴}\times ۵^{۴}$$

برای این‌که M و N نسبت به هم اول باشند، باید در M عامل ۵ و در N عامل ۳ را حذف کنیم که در این صورت باید داشته باشیم:

$۳a-۱۵=۰\rightarrow \boxed{a=۵}$ و $۲b-۴=۰\rightarrow \boxed{b=۲}$

مثال ۲۴ : اگر $M=۴^{۵}\times ۱۵^{۳}$ و $N=۱۶^{۲}\times ۴۵^{۳}$ و $P=۱۲^{۵}\times ۲۵$ باشند:

اولاً: M و N و P را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کنید.

ثانیاً: حاصل عبارات زیر را تعیین کنید:

(M,N) $\quad [N,P]$ $\quad [M,(N,P)]$ $\quad (M,[N,P])$

$\dfrac{[M,N]}{(N,P)}$ $\quad (M,MP)$ $\quad [N,NP]$

حل:

اولاً:

$$M = ۴^۵ \times ۱۵^۳ = (۲^۲)^۵ \times (۳ \times ۵)^۳ = ۲^{۱۰} \times ۳^۳ \times ۵^۳$$

$$N = ۱۶^۲ \times ۴۵^۳ = (۲^۴)^۲ \times (۳^۲ \times ۵)^۳ = ۲^۸ \times ۳^۶ \times ۵^۳$$

$$P = ۱۲^۵ \times ۲۵ = (۲^۲ \times ۳)^۵ \times ۵^۲ = ۲^{۱۰} \times ۳^۵ \times ۵^۲$$

ثانیاً:

$$(M, N) = ۲^۸ \times ۳^۳ \times ۵^۳$$

$$[N, P] = ۲^{۱۰} \times ۳^۶ \times ۵^۳$$

$$[M, (N, P)] = \left[۲^{۱۰} \times ۳^۳ \times ۵^۳ \,,\, (۲^۸ \times ۳^۶ \times ۵^۳ \,,\, ۲^{۱۰} \times ۳^۵ \times ۵^۲)\right]$$

$$\left[۲^{۱۰} \times ۳^۳ \times ۵^۳ \,,\, ۲^۸ \times ۳^۵ \times ۵^۲\right] = ۲^{۱۰} \times ۳^۵ \times ۵^۳$$

$$(M, [N, P]) = (۲^{۱۰} \times ۳^۳ \times ۵^۳ \,,\, ۲^{۱۰} \times ۳^۶ \times ۵^۳) = ۲^{۱۰} \times ۳^۳ \times ۵^۳$$

$$\frac{[M, N]}{(N, P)} = \frac{۲^{۱۰} \times ۳^۶ \times ۵^۳}{۲^۸ \times ۳^۵ \times ۵^۲} = ۲^۲ \times ۳ \times ۵ = ۶۰$$

$$(M, MP) = (۲^{۱۰} \times ۳^۳ \times ۵^۳ \,,\, ۲^{۲۰} \times ۳^۸ \times ۵^۵) = ۲^{۱۰} \times ۳^۳ \times ۵^۳ = M$$

$$[N, NP] = \left[۲^۸ \times ۳^۶ \times ۵^۳ \,,\, ۲^{۱۸} \times ۳^{۱۱} \times ۵^۵\right] = ۲^{۱۸} \times ۳^{۱۱} \times ۵^۵ = NP$$

نماد علمی اعداد

دانشمندان برای محاسبه‌ی جرم اجسام بزرگ مانند سیارات و یا جرم اجسام بسیار کوچک مانند جرم یک اتم از یک عنصر به اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک نیاز دارند که نوشتن و خواندن آن‌ها دشوار است. برای رهایی از مشکل قالبی را برای عددنویسی قرارداد کرده‌اند که به آن نماد علمی می‌گویند.

نماد علمی هر عدد مثبت به‌صورت $k \times ۱۰^n$ می‌باشد که در آن k عددی است اعشاری بین یک و ده و n نیز عددی صحیح می‌باشد.

به عنوان مثال فاصله‌ی زمین تا خورشید که حدود ۱۵۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰ متر است با نماد علمی به‌صورت $۱/۵\times۱۰^{۱۱}$ نشان داده می‌شود.
هم‌چنین شعاع مدار الکترون یک اتم ئیدروژن ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۵۳ سانتی‌متر است که با نماد علمی به‌صورت $۵/۳\times۱۰^{-۹}$ می‌باشد.

مثال ۲۵ : نماد علمی هریک از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۲۷۰۰۰۰۰۰۰

ب) ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۷

ج) $۵۴۲/۵\times۱۰^{-۷}$

د) $۰/۰۰۰۰۰۳۰۰۵\times۱۰^{-۴}$

حل:

الف) $۲۷۰۰۰۰۰۰۰=۲/۷\times۱۰^{۸}$

ب) $۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۷=۲/۳۷\times۱۰^{-۹}$

ج) $۵۴۲/۵\times۱۰^{-۷}=۵/۴۲۵\times۱۰^{۲}\times۱۰^{-۷}=۵/۴۲۵\times۱۰^{-۵}$

د) $۰/۰۰۰۰۰۳۰۰۵\times۱۰^{-۴}=۳/۰۰۵\times۱۰^{-۶}\times۱۰^{-۴}=۳/۰۰۵\times۱۰^{-۱۰}$

تمرین‌های فصل سوم

۱. حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد تواندار بنویسید.

الف) $۹^{۲۰}\times ۱۸^{۱۰}\times ۱۶^{۲۰}\times ۸^{۱۰}$

ب) $\left[۸^{۱۱}\div (۰/۵)^{۱۱}\right]\times ۱۶^{۷}$

ج) $\dfrac{۱۲^{۱۹}\times ۴^{۱۷}}{۴^{۱۱}\times ۱۲^{۱۳}}$

د) $\dfrac{۳۸^{۱۰}\times ۹^{۱۵}}{۹^{۵}\times ۵۷^{۱۰}}$

هـ) $-۷^{۱۰}\times (-۷)^{۱۰}\times (-۷)^{۹}$

و) $۱۵^{۲^{۳}}\times (۱۵^{۲})^{۳}\times ۱۵^{۳^{۲}}$

ز) $(۱۰^{۲})^{۳^{۲}}\times (۱۰^{۲^{۳}})^{۲}\times ۱۰^{۲^{۳^{۲}}}$

ح) $۲۷^{۱۰}\times ۸۱^{۷}\times ۲۴۳^{۴}$

ط) $\dfrac{۶۴^{۷}\times (\frac{۱}{۲})^{۸}}{۱۶^{۳}\times ۸^{۴}}$

ی) $۱۲۵^{۲^{۴}}\times ۶۲۵^{۳^{۲}}\times (۲۵^{۳^{۲}})^{۴}$

ک) $\left(\dfrac{۲}{۳}\right)^{۷}\times \left(\dfrac{۴}{۶}\right)^{۵}\times \left(\dfrac{۴}{۹}\right)^{۱۱}\times \left(\dfrac{۸}{۲۷}\right)^{۲}$

ل) $۲^{۱۴۸}\times ۵^{۱۱۱}\times ۳^{۷۴}$

۲. حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $(۰/۲۵)^{-۹}\times (۰/۱۲۵)^{۲}\times ۱۲۸^{۳}$

ب) $(۰/۲)^{-۸}\times ۶۲۵^{۲}\times (۰/۰۴)^{۳}$

ج) $\dfrac{۱۲۵^{-۴}\times (۰/۰۰۱۶)^{۲}}{(۰/۰۰۸)^{۳}\times ۲۵^{۷}}$

د) $\left(\dfrac{۳}{۵}\right)^{-۴}\times \left(\dfrac{۵}{۳}\right)^{۷}\times \left(\dfrac{۹}{۲۵}\right)^{۷}\times \left(\dfrac{۱۲۵}{۲۷}\right)^{-۴}$

هـ) $\dfrac{۱۶^{۳}\times \left(\dfrac{۱}{۲}\right)^{۵}}{(۰/۲۵)^{-۳}\times ۸^{-۷}}$

و) $\dfrac{۱۲۰^{۱۱}\times ۸۰^{-۴}\times \left(\dfrac{۲}{۳}\right)^{۱۶}}{۲۰^{۷}\times ۶^{-۵}\times (۰/۲۵)^{-۲}}$

ح) $\dfrac{5^{1500}\times 2^{2000}}{2000^{400}}$

ز) $\dfrac{5^{-7}\div 3^{-2}}{3^{2}\div 5^{11}}$

ی) $\dfrac{(0/04)^{-19}\times\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-4}}{3125^{-7}\times\left(\dfrac{1}{225}\right)^{-2}}$

ط) $\dfrac{125^{8}\div 9^{-12}}{81^{6}\div 25^{-3}}$

۳. حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

ب) $\dfrac{125^{7}+125^{7}}{625^{-2}+625^{-2}}$

الف) $\dfrac{27^{12}+27^{12}+27^{12}}{9^{20}+9^{20}+9^{20}}$

د) $\left(3^{10}+3^{10}+3^{10}\right)^{7}\left(2^{10}+2^{10}\right)^{7}$

ج) $\dfrac{2^{90}+2^{87}}{2^{80}+2^{77}}$

و) $\dfrac{4^{25}+2^{48}}{4^{24}+2^{46}}$

هـ) $\dfrac{25^{-30}+25^{-30}+25^{-30}}{5^{-15}+5^{-15}+5^{-15}}$

ح) $\dfrac{37\times 25^{10}-12\times 5^{20}}{(0/2)^{-8}\div(0/04)^{11}}$

ز) $\dfrac{2400^{15}\div 12^{22}}{15^{30}\div 6^{37}}$

ط) $\dfrac{25^{105}+5^{1}\times 5^{2}\times 5^{3}\times\ldots\times 5^{20}}{5^{-70}+5^{-70}}$

ی) $2^{5}\times 5^{-5}\times 2^{10}\times 5^{-10}\times\ldots\times 2^{100}\times 5^{-100}$

ک) $2^{70}+2^{70}+2^{71}+2^{72}+\ldots+2^{100}$

ل) $\dfrac{2^{50}+2^{51}+2^{52}+\ldots+2^{100}}{2^{-50}+2^{-51}+2^{-52}+\ldots+2^{-100}}$

م) $10\times 5^{19}+7\times 5^{20}-4\times 5^{20}$

ن) $11\times 3^{20}-2\times 3^{21}+4\times 3^{20}$

س) $4^{1000}+16^{500}+64^{100}\times 2^{1400}+2^{2000}$

ع) $۳^{۵۰}+۳^{۵۰}+۳^{۵۰}+۳^{۵۱}+۳^{۵۱}+۳^{۵۲}+۳^{۵۲}+...+۳^{۱۰۰}$

ف) $۲۷^{۱۱}+۲\times ۳^{۳۳}$

ص) $۲۵^{۲۵}+۳۱۲۵^{۱۰}+۳\times ۵^{۵۰}$

۴. مربع و ربع عدد $۶۴^{۷^{۲}}$ را حساب کنید.

۵. عدد $۲^{۴۰}\times ۵^{۳۵}$ یک عدد چند رقمی است؟

۶. اگر $A=۲^{x+۳}$ و $B=۳\times ۲^{x+۵}$، Aو B چه رابطه‌ای دارند؟

۷. اگر $A=۳^{۲x+۱}$ و $B=۹^{x-۲}$ باشد، بین A و B چه رابطه‌ای برقرار است؟

۸. اگر $۲^{x}=۱۰$ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید:

الف) $۱۶^{x-۱}$ ب) $(۰/۱۲۵)^{۱-x}$ ج) $۴^{x}+۸^{۲x}$ د) $\left(۲^{x}-۸\right)^{x}$

۹. اگر $۵^{x}=۱۰$ حاصل عبارت $\left[\left(\left(۵^{x}-۵\right)^{x}-۵\right)^{x}\right]^{۱۰۰}$ را حساب کنید.

۱۰. اگر $۲^{x}=۳$ حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

$\left(۲^{۲x-۱}-۲^{x-۱}-۲^{۰}\right)^{۵x-۵}$

۱۱. اگر $۲^{a}=۳$ و $۳^{b}=۲$، مطلوبست حاصل عبارات زیر:

الف) $۲^{ab}+۳^{ab}$ ب) $۲^{-ab}+ab$

۱۲. دو عدد $۲^{۳۳}$ و $۳^{۲۳}$ را با هم مقایسه کنید.

۱۳. سمت راست عدد $۲۵۰^{۷}\times ۵۴^{۵}\times ۱۵۰^{۶}$ چند رقم صفر قرار می‌گیرد؟

۱۴. دو عدد $۸۱^{-۱۰۰}$ و $۲۷^{-۱۳۴}$ را با هم مقایسه کنید.

۱۵. بین اعداد $۲۰^{۴}-۱$ و $۳۰^{۴}+۱$ چند عدد مربع کامل وجود دارد؟

۱۶. کوچک‌ترین عددی که باید در عدد ۵۴۰۰ ضرب شود تا آن‌را مربع کامل کند چیست؟ مکعب کامل چه‌طور؟

۱۷. عبارت زیر را ساده کنید:

$$\frac{۳^{x}+۳^{x+۱}+۳^{x+۳}+۳^{x+۳}}{۴\times۳^{x+۳}-۲\times۳^{x+۳}-۳^{x+۳}}$$

۱۸. اگر $A=۹^{۲۵}$ و $B=۲۷^{۱۶}$ حاصل عبارت زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید:

$$\frac{۶A^{۳}}{A+۹B}$$

۱۹. هر دسته از اعداد زیر را با هم مقایسه کنید:

الف) $۹۹^{۲۰}$ و $۹۹۹۹^{۱۰}$ ب) $۱۰^{۲۰}$ و $۹۰^{۱۰}$

۲۰. اگر $۳^{x}=۱۰$ و $۲^{y}=۵$ باشند، حاصل $\left(۴^{y+۱}-۱۹\right)^{x+۱}$ چیست؟

۲۱. اعداد $۶۴^{۳}$ و $۱۶^{۵}$ و $۲^{۱۹}$ را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

۲۲. اعداد ۳×۷^{۱۰۰۰} و ۱۵×۷^{۹۹۸} و ۸×۷^{۹۹۹} و $۷^{۱۰۰۱}$ را مقایسه کنید.

۲۳. اعداد $۲^{-۲۰۰۰}$ و $۳^{-۱۵۰۰}$ و $۵^{-۱۰۰۰}$ را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

۲۴. اعداد $۴^{۲۵}$ و $۹^{۱۵}$ را مقایسه کنید.

۲۵. بزرگ‌ترین عدد طبیعی m را تعیین کنید به‌طوری‌که $m^{۳۰۰}\leq ۶۲۵^{۲۲۵}$.

۲۶. حاصل کسر $\dfrac{۲^{۸}+۲^{۹}+۲^{۱۰}+...+۲^{۳۵}}{۲^{۲۲}+۲^{۸}}$ چیست؟

۲۷. اگر $x=۲^{۳a}$ و $y=۸^{a+۱}$ باشد، چه رابطه‌ای بین x و y موجود است؟

۲۸. کوچک‌ترین عدد طبیعی که باید در عدد $۳۵^{۳}\times۴۹^{۱۷}\times۲۲^{۱۳}\times۸^{۱۷}\times۹^{۷}$ ضرب شود تا حاصل مربع کامل باشد چیست؟

۲۹. اگر $a = \left(۳^{k+۱}\right)^{۲} \times ۹$ و $b = \left(۳^{k-۱}\right)^{۲} \times ۲۷$ باشد، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

۳۰. کوچک‌ترین عددی که باید در ۲۴۰۰ ضرب شود و آن‌را مجذور کامل کند چیست؟

۳۱. اگر $x = t^{\frac{۱}{t-۱}}$ و $y = t^{\frac{t}{t-۱}}$ و $t > ۰$ و $t \neq ۱$ باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟

۳۲. اگر $۲^{a} = ۳$ و $۳^{-b} = ۲$ باشد، حاصل $(ab)^{-۸} - (ab)^{-۷}$ را حساب کنید.

۳۳. به ازای چه مقداری از n حاصل عبارت $۴^{n-۱} \times ۵^{n+۳}$ به‌صورت توانی از ۱۰ می‌شود؟

۳۴. سمت راست عدد !۵۰ چند رقم صفر قرار می‌گیرد؟

۳۵. مجموع ارقام عدد $۱۰۰^{۱۷۵} - ۱۷۵$ چیست؟

۳۶. معادلات توانی زیر را حل کنید:

الف) $۵^{۲x+۲} \times ۲^{۲x} = ۰/۰۰۲۵$

ب) $\left(\frac{۱}{۴۹}\right)^{x-۱/۵} \times ۷^{x} = ۷^{۴}$

ج) $۲^{x+۱} + ۲^{۲+x} = ۶$

د) $۳^{x} + ۳^{x+۱} + ۳^{x+۲} + ۳^{x+۳} = ۳۶۰$

هـ) $۵^{۲x+۱} + ۲۵^{x} - ۵^{۲x+۲} + ۲۵^{x+۱} - ۵^{۲x} = ۵^{۱۰۱}$

و) $۷^{x+۱} - ۵^{۲x+۱} = ۵^{۲x} + ۷^{x}$

ز) $\dfrac{۲۷^{x-۱} + ۸۱^{x}}{۳^{۳x}} = \dfrac{۴}{۲۷}$

ح) $\dfrac{۵^{۳x+۲} - ۵^{۳x+۱}}{۹^{x+۱} + ۳^{۲x}} = \dfrac{۲۵۰}{۹}$

ط) $\dfrac{(۰/۲۵)^{۱-x} \times ۸۰^{-x}}{(۰/۱)^{x+۲} \times (۰/۲)^{-۲}} = ۱$

ی) $\dfrac{۴^{x+۲} \times ۵^{x}}{۲^{۲x+۲} \times ۱۰^{x-۱}} = ۵$

ک) $\dfrac{۹^{x} + ۳^{x+۲} + ۱۸}{۱ + ۳^{x}} = ۱۸$

ل) $(۰/۰۰۸)^{x-۲} = ۲۵^{x+۳}$

۳۷. دستگاه معادلات توانی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} ۸^{۲x+۱} = ۳۲ \times ۲^{۴y+۱۲} \\ ۵^{x-y+۱} = ۲۵^{\frac{۲y+۱}{۲}} \end{cases}$$

۳۸. اگر $\frac{۴^x}{۲^{x+y}} = ۱$ و $\frac{۹^{x+y}}{۳^{۵y}} = ۲۴۳$ باشد، حاصل xy چقدر است؟

۳۹.بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک هر دسته از اعداد زیر را به‌دست آورید.

ب) ۳۳۰ و ۴۴۰ و ۱۹۸ و ۱۳۲
الف) ۹۳۶۰ و ۶۲۴۰

د) $۱۲۰^۳ \times ۸^۵$ و $۱۲^۴ \times ۹^۳ \times ۴۲^۵$ و $۸۰^۳ \times ۴۹$
ج) $۲۴^۷ \times ۳۳^۲ \times ۳۶^۵ \times ۲۲^۳$

۴۰.اگر ب. م. م دو عدد $۷۲a$ و $۴۸a^۲$ برابر ۱۲۰ باشد، ک. م. م اعداد $۱۲۰a^۲$ و $۱۵۰a$ را حساب کنید. $(a \neq ۲ , ۳)$

۴۱. کوچک‌ترین عدد چهار رقمی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر هر یک از اعداد ۱۸ و ۲۴ و ۴۰ برابر پانزده باشد، چیست؟

۴۲. همه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک سه عدد ۲۶۴ و ۳۶۰ و ۴۸۰ را بنویسید.

۴۳. اگر a بر b و b بر c بخش‌پذیر باشد، حاصل $\left[\left(a^۳ , b^۲\right), c^۲\right]$ چیست؟

۴۴. اگر a و b دو عدد متباین باشند، حاصل $\left[a^{۱۷}, \left(a^{۱۲}, b^{۲۰}\right)\right]$ چیست؟

۴۵. اگر $A = ۱۲۰^۶ \times ۲۴۵^۲$ و $B = ۱۸۰^۵ \times ۷۰۰^۳$ باشند، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک A و B را تعیین کنید.

۴۶. نماد علمی هریک از اعداد زیر را بنویسید.

ب) ۲۰۰۱
الف) ۰/۰۰۰۰۱۳۷۹

د) $۱۴/۵۴۶ \times ۱۰^{-۸}$
ج) ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۷۲۸

هـ) $0/00003 \times 0/000093 \times (0/001)^{-2}$ و) $0/00501 \times 10^{2}$

ز) $(0/01)^{-5} \times 100004 \times 0/0002 \times \frac{1}{(0/0001)^{5}}$

ح) $\frac{27 \times 10^{-5} \times 540 \times 7500 \times 10^{2}}{80 \times 10^{-2} \times 5^{3} \times 10^{-2} \times 9^{2}}$

ط) $\frac{35 \times 50}{0/01 \times 10^{2}}$

☞ فصل چهارم

چندجمله‌ای‌ها

عبارت جبری

عبارت ریاضی که روی مجموعه‌ی اعداد بیان شده عبارت جبری نامیده می‌شود. هر عبارت جبری مشتمل بر نمادها و حروف می‌باشد که در واقع بیانگر اعدادند و شامل نشانه‌هایی مربوط به روابط و اعمالی است که باید روی آن اعداد عمل شود. به کارگیری حروف و علامت‌ها نخستین بار در علم جبر آغاز شد.

در هر عبارت جبری عددها و حرف‌هایی که جانگهدار اعدادی مشخص و معین باشند مقادیر معلوم (پارامتر) و حرف‌هایی که نشان‌دهنده‌ی اعداد غیرمشخص باشند، متغیرهای عبارت نامیده می‌شوند. یک عبارت جبری با متغیرهایش معین می‌شود و برحسب تعداد متغیرها آن‌را عبارت یک متغیری یا دو متغیری یا چندمتغیری می‌نامند.

عبارت جبری با متغیر x را با $f(x)$ و عبارت جبری با دو متغیر x و y را با نماد $f(x,y)$ نشان می‌دهیم. مانند:

$$f(x)=۲x+۱ \qquad f(x,y)=x^۲+۲y \qquad f(x,y,z)=x^۳+y^۳+z^۳$$

☆ عبارات جبری معین و نامعین

عبارت جبری را به ازای یک مقدار از متغیر (یا مقادیری از متغیرها) معین گویند،هرگاه به ازای آن مقدار (یا آن مقادیر) کلیه‌ی عملیات به‌کار رفته قابل انجام باشد. در غیر این صورت عبارت جبری نامعین است. در مجموعه‌ی اعداد حقیقی در صورتی‌که مخرج کسر به ازای مقادیری از متغیر صفر شود عبارت نامعین می‌باشد. هم‌چنین یک عبارت جبری گنگ با فرجه‌ی زوج در صورتی نامعین است که به ازای مقادیری از متغیر عبارت زیر رادیکال منفی باشد.

مثال ۱ :مشخص کنید عبارات جبری زیر به ازای چه مقادیری از x معین می‌باشند؟

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2-1} \qquad g(x)=2x^2+3x+1$$

$$p(x)=\sqrt[3]{x+1} \qquad Q(x)=\sqrt{x-3}$$

حل:

عبارت $f(x)$ به ازای $x=1$ و $x=-1$ نامعین است و به ازای سایر مقادیر حقیقی معین است.

عبارت جبری $g(x)$ به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی معین است. زیرا نه مخرج دارد و نه رادیکال.

عبارت $p(x)$ نیز همواره معین است چرا که فرجه‌ی رادیکال فرد است.

عبارت $Q(x)$ به ازای همه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۳ معین است.

$$x-3\geq 0\rightarrow x\geq 3$$

☆ اقسام عبارت‌های جبری

عبارات جبری با توجه به نوع نماهایی که متغیرها دارند به گونه‌های مختلف تقسیم می‌شود:

۱- **عبارت جبری صحیح:** یک عبارت جبری را نسبت به متغیرهایش صحیح گویند در صورتی‌که توان متغیرهایش صحیح و نامنفی باشد. مانند:

$$f(x)=x^2+3x \qquad g(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{5}$$

۲-**عبارت جبری کسری:** یک عبارت جبری نسبت به حرفی از آن، کسری است هرگاه اقلاً یک عامل شامل حرف مزبور دارای نمای منفی باشد. یعنی کسری وجود داشته باشد که مخرج آن شامل آن حرف باشد، مانند:

$$f(x)=x+\frac{1}{x} \qquad g(x)=x+\frac{x}{x^2-1}$$

۳-**عبارت جبری گویا:** یک عبارت جبری نسبت به حرفی از آن گویاست هرگاه هیچ توان غیرصحیح از آن حرف در عبارت وجود نداشته باشد، مانند هریک از مثال‌های بالا.

هرگاه لااقل یک توان غیرصحیح شامل یک متغیر در عبارت وجود داشته باشد، عبارت نسبت به آن متغیر گنگ می‌باشد. مانند عبارت $f(x,y)=x+\sqrt{x+۱}+۲y$ که نسبت به x گنگ و نسبت به y گویاست. (لازم به تذکر است متغیرهایی که زیر رادیکال قرار می‌گیرند توانشان کسری است.)

مثال ۲ : از عبارات زیر کدام‌یک گنگ و کدام‌یک گویا هستند؟

$$g(x)=\sqrt{x}+۲ \qquad f(x)=x+\sqrt{۲}$$

$$t(x)=\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{۲}{۳}x+۱ \qquad h(x)=۳x^{۲}+۲x+\sqrt{x}$$

حل:

$f(x)$ و $t(x)$ گویا و $g(x)$ و $h(x)$ گنگ می‌باشند.

☆ حوزه‌ی تعریف یک عبارت جبری

مجموعه‌ای که به ازای هر عضو آن عبارت جبری، به عبارتی معین تبدیل شود حوزه‌ی تعریف عبارت نامیده می‌شود.

هر عبارت جبری صحیح همواره معین است. لذا حوزه‌ی تعریف آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. هر عبارت کسری به ازای مقادیری که مخرج عبارت را صفر می‌کنند نامعین و به ازای سایر مقادیر حقیقی معین است. هم‌چنین یک عبارت جبری گنگ با فرجه‌ی فرد همواره معین است و حوزه‌ی تعریفش مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. اما اگر فرجه زوج باشد عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

مثال ۳ : حوزه‌ی تعریف هریک از عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $f_{۱}(x)=x^{۲}-۳x-۱$

ب) $f_{۲}(x)=\frac{۲x-۳}{x^{۲}-۴}$

ج) $f_{۳}(x)=\sqrt[۳]{۲x-۵}$

د) $f_{۴}(x)=\sqrt{x+۵}$

هـ) $f_{۵}(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}+\sqrt[۳]{x-۲}$

و) $f_{۶}(x)=\sqrt{\frac{-۱}{x+۲}}+\sqrt{\frac{۱}{x+۵}}$

حل:

الف) $f_1(x)$ همواره معین است و حوزه‌ی تعریف آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

ب) $x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow$ حوزه‌ی تعریف $= R-\{-2,2\}$

ج) با توجه به این‌که فرجه‌ی رادیکال در عبارت $f_3(x)$ فرد است، لذا این عبارت همواره معین است و حوزه‌ی تعریف آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

د) $x+5\geq 0 \rightarrow x\geq -5$

حوزه‌ی تعریف $=\{x \mid x\in R \ ,\ x\geq -5\}$

هـ) عبارت x^2+1 همواره مثبت است. لذا $f_5(x)$ همواره معین و دامنه‌ی آن R است.

و) $\begin{cases} x+2<0 \rightarrow x<-2 \\ x+5>0 \rightarrow x>-5 \end{cases} \Rightarrow -5<x<-2$

حوزه‌ی تعریف $=\{x \mid x\in R \ ,\ -5<x<-2\}$

☆ مقدار عددی یک عبارت جبری

هر عبارت جبری روی مجموعه‌ی اعداد بیان شده است. بنابراین خود نشاندهنده‌ی یک عدد است که این عدد برحسب مقادیری که به‌جای متغیر قرار می‌دهیم محاسبه می‌شود. اگر $f(x)$ یک عبارت جبری باشد مقدار عددی عبارت را به ازای $x=a$ به‌صورت $f(a)$ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال مقدار عددی عبارت $2x-1$ به ازای $x=5$ برابر است با:

$2\times 5-1=9$

مثال ۴ : مقدار عددی عبارت $f(x)=(x^2-2x+1)^{17}$ را به ازای $x=1$ حساب کنید.

حل:

$$f(1)=(1^2-2\times 1+1)^{17}=0^{17}=0$$

مثال ۵ : اگر $f(x)=x^2-1$ حاصل $f(3)$ و $f(\sqrt{2})$ و $f(x+1)$ را به‌دست آورید.

حل:

$$f(3)=3^2-1=9-1=8$$

$$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-1=2-1=1$$

$$f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x$$

مثال ۶ : نشان دهید مقدار عددی عبارت زیر در صورتی‌که $x = -y$ باشد، برابر صفر است.

$$A = (x + y + z)(xy + yz + xz) - xyz$$

✎ حل:

$$A = (-y + y + z)(-y \times y + yz - yz) - (-y)yz = z(-y^{۲}) + y^{۲}z$$
$$= -y^{۲}z + y^{۲}z = ۰$$

یک‌جمله‌ای جبری

یک عبارتِ جبری صحیح که فقط شامل عمل ضرب و توان طبیعی باشد یک‌جمله‌ای جبری نامیده می‌شود. حاصل‌ضرب عامل‌های عددی و معلوم را ضریب عددی یک‌جمله‌ای و مجموع نماهای متغیرهای آن‌را درجه‌ی یک‌جمله‌ای می‌گویند.
درجه‌ی یک‌جمله‌ای نسبت به یک متغیر برابر است با نمای این متغیر در آن یک‌جمله‌ای، درجه‌ی یک‌جمله‌ای نسبت به متغیری که در یک‌جمله‌ای نیست صفر است.

مثال ۷ : یک‌جمله‌ای $۵x^{۲}y^{۳}z$ را درنظر بگیرید. ضریب عددی این یک‌جمله‌ای ۵ است. این یک‌جمله‌ای نسبت به x از درجه‌ی ۲، نسبت به y از درجه‌ی ۳ و نسبت به z از درجه‌ی یک و نسبت به سایر حروف از درجه‌ی صفر است. هم‌چنین درجه‌ی یک‌جمله‌ای نسبت به همه‌ی حروف برابر $۶ = ۱ + ۳ + ۲$ است.

مثال ۸ : ضریب عددی و درجه‌ی یک‌جمله‌ای زیر را نسبت به همه‌ی حروف به‌دست آورید.

$$A = ۲x^{۲}y^{۳}zx^{۳} \times \frac{۳}{۲}y^{۵}$$

✎ حل:

ابتدا با استفاده از قواعد توان باید یک‌جمله‌ای را ساده کنیم: $A = ۳x^{۵}y^{۸}z$

ضریب عددی ۳ و درجه‌ی A نسبت به x و y و z به‌ترتیب از درجه‌ی ۵ و ۸ و ۱ و نسبت به همه‌ی حروف از درجه‌ی ۱۴ است.

مثال ۹ : کدام‌یک از عبارات زیر یک‌جمله‌ای هستند؟

الف) $\frac{۴xy}{z}$

ب) $۵x^{۲}y^{۲} + ۱$

ج) ۱۳

د) $۵^{-۱}x^{۲} \times ۳x$

حل:

الف و ب یک‌جمله‌ای نیستند ولی ج و د یک‌جمله‌ای جبری می‌باشند.

☆ یک‌جمله‌ای متشابه

چند یک‌جمله‌ای را متشابه گویند، در صورتی‌که حروفشان یکسان و نمای حروف متناظر با هم برابر باشند. مانند $۷x^{۲}y$ و $-۳x^{۲}y$ و $\sqrt{۳}x^{۲}y$.

☆ جمع و تفریق یک‌جمله‌ای جبری

دو یا چند یک‌جمله‌ای را در صورتی می‌توان با هم جمع یا تفریق کرد که جمله‌ها متشابه باشند. برای این منظور کافی است ضرایب عددی جمله‌ها را با هم جمع (تفریق) کرد.

مثال ۱۰:

الف) $۷ab + ۳ab = (۷+۳)ab = ۱۰ab$

ب) $۱۲ab^{۲} - ۵ab^{۲} = (۱۲-۵)ab^{۲} = ۷ab^{۲}$

ج) $\frac{ab}{۲} - \frac{۲ab}{۳} + \frac{ab}{۴} + \frac{۵}{۱۲}ab = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۵}{۱۲}\right)ab = \left(\frac{۶-۸+۳+۵}{۱۲}\right)ab$

$= \frac{ab}{۲}$

د) $۳a^{۲}b^{۳} + ۵a^{۲}b^{۳} - ۷a^{۲}b^{۳} = (۳+۵-۷)a^{۲}b^{۳} = a^{۲}b^{۳}$

☆ ضرب (تقسیم) یک جمله‌ی جبری در یک عدد

برای این‌که یک جمله‌ی جبری را در یک عدد ضرب یا بر یک عدد تقسیم کنیم، کافی است ضریب جمله را در آن عدد ضرب یا بر آن عدد تقسیم کنیم.

مثال ۱۱:

الف) $۱۸a^{۲}b^{۳}c^{۴} \times ۲ = ۳۶a^{۲}b^{۳}c^{۴}$

ب) $۱۸a^{۲}b^{۳}c^{۴} \div ۲ = ۹a^{۲}b^{۳}c^{۴}$

☆ ضرب یک‌جمله‌ای‌ها

برای ضرب دو یک‌جمله‌ای جبری، ضرایب عددی را در هم و حروف متناظر را نیز در هم ضرب می‌کنیم.

مثال ۱۲:

الف) $5x^2y^3 \times 2x^3y^2z = 10x^5y^5z$

ب) $\frac{2}{3}x^4y^2z^3 \times 6xy^3z^2 \times x^5y^5z^5 = 4x^{10}y^{10}z^{10}$

مثال ۱۳: اگر $A = 2a^3b$ و $B = 3ac^3$ و $C = 5b^3c$ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\left(\frac{2AB}{3}\right)^2$ ب) A^2C^2

ج) $(ABC)^2$ د) $\frac{3}{2}A \times \frac{5}{3}B \times \frac{4}{5}C$

حل:

الف) $\left(\frac{2AB}{3}\right)^2 = \left(\frac{2 \times 2a^3b \times 3ac^3}{3}\right)^2 = \left(4a^4bc^3\right)^2 = 16a^8b^2c^6$

ب) $A^2C^2 = \left(2a^3b\right)^2\left(5b^3c\right)^2 = \left(4a^6b^2\right)\left(25b^6c^2\right) = 100a^6b^8c^2$

ج) $(ABC)^2 = \left(2a^3b \times 3ac^3 \times 5b^3c\right)^2 = \left(30a^4b^4c^4\right)^2 = 900a^8b^8c^8$

د) $\frac{3}{2}A \times \frac{5}{3}B \times \frac{4}{5}C = 2ABC = 2 \times 2a^3b \times 3ac^3 \times 5b^3c = 60a^4b^4c^4$

مثال ۱۴: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $2a^2b \times 3a^3b^4 + 4a \times a^4b^5$

ب) $16a^7b^{10} - \left(2ab^4 \times 3a^2\right)\left(\frac{1}{3}b^3a^2 \times 2a^2b^3\right) - 3a^5 \times \left(ab^5\right)^2$

حل:

الف) $2a^2b \times 3a^3b^4 + 4a \times a^4b^5 = 6a^5b^5 + 4a^5b^5 = 10a^5b^5$

ب) $16a^7b^{10} - \left(2ab^4 \times 3a^2\right)\left(\frac{1}{3}b^3a^2 \times 2a^2b^3\right) - 3a^5 \times \left(ab^5\right)^2$

$= 16a^7b^{10} - 6a^3b^4 \times \frac{2}{3}a^4b^6 - 3a^5 \times a^2b^{10}$

$= 16a^7b^{10} - 4a^7b^{10} - 3a^7b^{10} = 9a^7b^{10}$

مثال ۱۵ : اگر $A = ۳a^{۲}b^{۴}$ و $B = ۵a^{۳}b^{۶}$، حاصل عبارت $\left(A^{۳} - B^{۲}\right)^{۵}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$(A^{۳} - B^{۲})^{۵} = (۲۷a^{۶}b^{۱۲} - ۲۵a^{۶}b^{۱۲})^{۵} = (۲a^{۶}b^{۱۲})^{۵} = ۳۲a^{۳۰}b^{۶۰}$$

☆ تقسیم یک‌جمله‌ای بر یک جمله‌ای

برای تقسیم یک‌جمله‌ای A بر یک‌جمله‌ای B، ضرایب عددی را بر هم و حروف متناظر را بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال ۱۶ :

الف) $۱۸a^{۲}b^{۳}c^{۴} \div ۶ab^{۳}c^{۲} = ۳ac^{۲}$

ب) $۲a^{۷}b^{۵} \div ۵b^{۳}a^{۴} = \frac{۲}{۵}a^{۳}b^{۲}$

مثال ۱۷ : اگر $A = ۶x^{۲}y^{۳}z^{۴}$ و $B = ۴x^{۴}y^{۳}z^{۲}$ و $C = ۱۲x^{۲}y^{۲}z^{۲}$ حاصل عبارت $\frac{A \times ۲B}{C}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\frac{A \times ۲B}{C} = \frac{۶x^{۲}y^{۳}z^{۴} \times ۲ \times ۴x^{۴}y^{۳}z^{۲}}{۱۲x^{۲}y^{۲}z^{۲}} = \frac{۴۸x^{۶}y^{۶}x^{۶}}{۱۲x^{۲}y^{۲}z^{۲}} = ۴x^{۴}y^{۴}z^{۴}$$

☆ بخش‌پذیری یک‌جمله‌ای بر یک‌جمله‌ای

یک‌جمله‌ای A بر یک‌جمله‌ای B بخش‌پذیر است، در صورتی‌که حاصل تقسیم A بر B خود یک‌جمله‌ای باشد و این در صورتی میسر است که اولاً همه‌ی متغیرهای B در A نیز باشند. ثانیاً نمای عامل‌های موجود در B از نمای عامل‌های متناظرشان در A کوچک‌تر یا مساوی باشند.

مثال ۱۸ : یک‌جمله‌ای $A = ۶a^{۳}b^{۲}c^{۴}$ بر کدام‌یک از جمله‌های زیر بخش‌پذیر است؟

$B = ۲a^{۲}bc^{۲}$ $\quad C = ۵a^{۳}c^{۲}$ $\quad D = ۳a^{۳}b^{۳}$ $\quad E = ۷a^{۲}bc^{۲}d$

✎ حل:
عبارت A بر یک‌جمله‌ای‌های B و C بخش‌پذیر است ولی بر یک‌جمله‌ای‌های D و E بخش‌پذیر نیست.

چندجمله‌ای (بس‌جمله‌ای)

مجموع جبری چند یک‌جمله‌ای که همه‌ی آن‌ها متشابه نباشند یک چندجمله‌ای نامیده می‌شود. چندجمله‌ای با یک متغیر x را با $p(x)$ یا $Q(x)$ و مانند آن و چندجمله‌ای با چند متغیر x و y و z و ... را با $p(x, y, z, ...)$ یا $Q(x, y, z, ...)$ نشان می‌دهند.

$$P(x) = ۴x^{۵} - ۷x^{۴} - x^{۲} + ۱$$

$$P(x, y) = x^{۲}y^{۳} - ۵xy^{۲} + ۲xy - ۳$$

☆ درجه‌ی چندجمله‌ای

درجه‌ی چندجمله‌ای عبارتست از درجه‌ی جمله‌ای از آن که نسبت به دیگر جمله‌های آن بزرگ‌ترین درجه را داشته باشد. مثلاً چندجمله‌ای $۴x^{۵} + ۵x^{۲}y^{۳} + ۳x^{۳}y^{۴} - ۲yx - ۶$ نسبت به متغیرهایش از درجه‌ی ۷ است که همان درجه‌ی $۳x^{۳}y^{۴}$ است. هم‌چنین چندجمله‌ای مزبور نسبت به x از درجه‌ی ۵ و نسبت y از درجه‌ی ۴ است.

مثال ۱۹: معین کنید چندجمله‌ای $۳x^{۲} + ۴y^{۳} + x^{۲}y^{۳} + x^{۴}y + ۲y^{۵}x$ نسبت به هریک از متغیرهای x و y و هم‌چنین نسبت به همه‌ی حروف از چه درجه‌ای است؟

✎ حل:
درجه‌ی چندجمله‌ای نسبت به x برابر ۴ و نسبت به y برابر ۵ و نسبت به همه‌ی حروف برابر ۶ است.

☆ مجموع ضرایب چندجمله‌ای

مجموع‌ضرایب چندجمله‌ای $p(x)$ در واقع با مقدار عددی آن به ازای $x = ۱$ که آن را با $p(۱)$ نشان می‌دهیم، برابر است. هم‌چنین مجموع ضرایب چندجملهای $p(x, y, z, ...)$ برابر $p(۱,۱,۱,...)$ است.

مثال ۲۰ : مجموع ضرایب هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را به‌دست آورید.

$$p(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 7$$
$$Q(x) = (5x^2 - 7x + 1)^{20}$$
$$R(x,y) = (2x - y)(x^2 + 4xy + 3y^2)$$

✎ حل:

$$p(1) = 5\times1^4 - 2\times1^3 + 3\times1^2 - 2\times1 - 7 = 5 - 2 + 3 - 2 - 7 = -3$$
$$Q(1) = (5\times1^2 - 7\times1 + 1)^{20} = (5 - 7 + 1)^{20} = (-1)^{20} = 1$$
$$R(1,1) = (2\times1 - 1)(1^2 + 4\times1\times1 + 3\times1^2) = (2-1)(1+4+3) = 1\times8 = 8$$

☆ چندجمله‌ای همگن

اگر همه‌ی جمله‌های یک چندجمله‌ای هم درجه باشند، آن چندجمله‌ای را همگن یا متجانس می‌نامند، مانند:

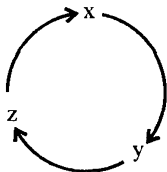
$$p(a,b) = 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$p(x,y) = x^5 - 3x^4y + 2x^2y^3 - 6xy^4$$

از ویژگی‌های چندجمله‌ای همگن درجه‌ی n یکی آن است که اگر هریک از متغیرهای آن در عدد ثابت k ضرب شود آن چندجمله‌ای در k^n ضرب می‌گردد. در مثال بالا:

$$p(ka,kb) = k^4 . p(a,b)$$
$$p(kx,ky) = k^5 p(x,y)$$

☆ چندجمله‌ای متقارن

یک چندجمله‌ای دومتغیره متقارن نامیده می‌شود هرگاه با جابه‌جا کردن هر دو متغیر از آن، چندجمله‌ای تغییر نکند. یک چندجمله‌ای با سه متغیر متقارن است در صورتی با هر تبدیل دوری تغییر نکند، مانند:



$$p(x,y) = p(y,x)$$
$$p(x,y,z) = p(z,x,y) = p(y,z,x)$$
$$p(a,b) = 3a^2 + 3b^2 - 2ab + 1$$
$$Q(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc(a+b+c)$$

ممکن است یک چندجمله‌ای هم متقارن و هم همگن باشد، مانند:

$$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

ویژگی مهم چندجمله‌ای متقارن $p(x,y)$ آن است که می‌توان آن‌را برحسب $x+y$ و xy بیان کرد. از ویژگی‌های دیگر عبارات متقارن این است که با هر تبدیل دوری به عبارت متقارن دیگر تبدیل می‌شوند.

☆ چندجمله‌ای زوج و چندجمله‌ای فرد

چندجمله‌ای را نسبت به یک متغیر زوج گویند، در صورتی‌که با تبدیل آن متغیر به قرینه‌ی خود، چندجمله‌ای فرق نکند. یعنی $p(-x)=p(x)$ و اگر با تبدیل متغیر به قرینه‌ی خود، چندجمله‌ای نیز به قرینه‌ی خود تبدیل شود، یعنی $p(-x)=-p(x)$ آن چندجمله‌ای را نسبت به آن متغیر فرد گویند. ممکن است یک چندجمله‌ای نه زوج باشد و نه فرد.

مثال ۲۱: چندجمله‌ای $p(x)=x^2+1$ زوج و چندجمله‌ای $Q(x)=x^3+x$ فرد و چندجمله‌ای $k(x)=x^3+x^2-2x+1$ نه زوج است و نه فرد.

☆ چندجمله‌ای استاندارد (متعارف)

یک چندجمله‌ای را استاندارد گویند در صورتی‌که برحسب توان‌های نزولی مرتب شده باشد.

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$$

مثال ۲۲: چندجمله‌ای $p(x)=x^2-7x^4+x^5-3x+2+x^3$ را به‌صورت استاندارد بنویسید.

✎ **حل:**

$$p(x)=x^5-7x^4+x^3+x^2-3x+2$$

☆ چندجمله‌ای متحد با صفر (قضیه)

برای این‌که یک چندجمله‌ای متحد با صفر باشد لازم و کافی است که همه‌ی ضریب‌های آن صفر باشند.

اثبات: چندجمله‌ای $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را درنظر بگیرید.

اولاً: اگر داشته باشیم $a_n = a_{n-۱} = ... = a_۲ = a_۱ = a_۰ = ۰$ مقدار چندجمله‌ای بـه ازای هـر مقدار از x صفر می‌شود.

ثانیاً: اگر چندجمله‌ای به ازای هر مقدار از x متحد با صفر باشد به ازای $x = ۰$ نیز صـفر اسـت. لذا $a_۰ = ۰$. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + ... + a_۲ x^۲ + a_۱ x = ۰$$

$$x (a_n x^{n-۱} + a_{n-۱} x^{n-۲} + ... + a_۲ x + a_۱) = ۰$$

این عبارت در صورتی همواره صفر است که عبارت داخل پرانتز صفر باشـد. لـذا بـه ازای $x = ۰$ نیـز باید صفر باشد که از آن‌جا خواهیم داشت $a_۱ = ۰$. به همین ترتیب با تکرار استدلال می‌توان گفت:

$$a_n = a_{n-۱} = ... = a_۲ = a_۱ = a_۰ = ۰$$

☆ چندجمله‌ای‌های متحد

برای آن‌که دو چندجمله‌ای چندمتغیری با هم متحد باشند لازم و کافی اسـت کـه جملـه‌هـای آن‌ها نظیر به نظیر با هم متحد باشند.

برای آن‌که دو چندجمله‌ای نسبت به یک متغیر متحد باشـند، لازم و کـافی اسـت کـه ضـرایب جمله‌های هم درجه با هم برابر باشند. زیرا:

اگـــــــــر دو چندجملـــــــــه‌ای $p(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + ... + a_۱ x + a_۰$ و $Q(x) = b_n x^n + b_{n-۱} x^{n-۱} + ... + b_۱ x + b_۰$ با هم متحد باشند، تفاضـل آن‌هـا متحـد بـا صفر است. یعنی:

$$(a_n - b_n) x^n + (a_{n-۱} - b_{n-۱}) x^{n-۱} + ... + (a_۱ - b_۱) x + (a_۰ - b_۰) \equiv ۰$$

مثال ۲۳ : مقادیر a و b و c را چنان تعیین کنید که دو چندجمله‌ای زیر متحد باشند.

$$\boldsymbol{p(x) = (a-۱)x^۳ - ۳x^۲ + (a+b+۲)x + c - ۲}$$

$$\boldsymbol{Q(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - x + b - ۱}$$

حل:

$$\begin{cases} a - ۱ = ۲ \rightarrow a = ۳ \\ a + b + ۲ = -۱ \rightarrow ۳ + b + ۲ = -۱ \rightarrow b = -۶ \\ c - ۲ = b - ۱ \rightarrow c - ۲ = -۶ - ۱ \rightarrow c = -۵ \end{cases}$$

اعمال بر چندجمله‌ای‌ها

☆ جمع چندجمله‌ای‌ها

برای به‌دست آوردن حاصل جمع چندجمله‌ای‌ها فقط جملات متشابه را با هم جمع می‌کنیم و جملات غیرمتشابه را عیناً می‌نویسیم.

مثال ۲۴ :

الف) $(2a+3b-7)+(5a-4b-3)=2a+3b-7+5a-4b-3$

$=7a-b-10$

ب) $(3a^2+5a)+(a-2a^2-5)=3a^2+5a+a-2a^2-5=a^2+6a-5$

مثال ۲۵ : اگر $A=\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{5}-1$ و $B=\frac{2}{3}x^2+\frac{12}{5}x+3$ حاصل $A+B$ را تعیین کنید.

حل:

$$A+B=\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{5}-1\right)+\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{12}{5}x+3\right)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{5}x-1+\frac{2}{3}x^2+\frac{12}{5}x+3$$

$$=x^2+2x+2$$

مثال ۲۶ : اگر $A=2xy-3x-x^2y+7$ و $B=7x+11-3xy+xy^2$ حاصل $A+B$ را به‌دست آورید.

حل:

$$A+B=2xy-3x-x^2y+7+7x+11-3xy+xy^2=-xy+4x-x^2y$$
$$+xy^2+18$$

خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری) ضرب نسبت به جمع (تفریق)

$$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C) \qquad A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

☆ ضرب یک عدد در یک چندجمله‌ای

بنابر خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع و تفریق، برای این‌که یک عدد را در یک چندجمله‌ای ضرب کنیم کافی است عدد را در تک‌تک جملات چندجمله‌ای ضرب کنیم.

مثال ۲۷ :

الف) $5(2x-3y-1)=10x-15y-5$

ب) $\frac{2}{3}(6x^2-3x-9)=4x^2-2x-6$

☆ قرینه‌ی یک چندجمله‌ای

اگر چندجمله‌ای A را در عدد ۱- ضرب کنیم چندجمله‌ای حاصل قرینه‌ی چندجمله‌ای A نامیده می‌شود که آن‌را با $-A$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲۸ :

$$A=2x^2-3x+5$$

$$-A=(-1)(2x^2-3x+5)=-2x^2+3x-5$$

☆ تفریق چندجمله‌ای‌ها

اگر A و B دو چندجمله‌ای باشند، آن‌گاه:

$$A-B=A+(-B)$$

مثال ۲۹ : اگر $A=5x^2-2x+3$ و $B=x^2-3x-1$ باشد، آن‌گاه:

$$A-B=A+(-B)=(5x^2-2x+3)+(-x^2+3x+1)=4x^2+x+4$$

$$B-A=B+(-A)=(x^2-3x-1)+(-5x^2+2x-3)=-4x^2-x-4$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود $A-B$ و $B-A$ قرینه‌ی یک‌دیگرند.

مثال ۳۰ : اگر $A=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y-1$ و $B=4x-2y+6$ حاصل عبارت $6A-\frac{1}{2}B+9$ را به‌دست آورید.

✎ **حل:**

$$6A-\frac{1}{2}B+9=6\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y-1\right)-\frac{1}{2}(4x-2y+6)+9=4x-3y-6-2x$$

$$+y-3+9=2x-2y$$

☆ ضرب چندجمله‌ای‌ها

چندجمله‌ای‌های $A = ۲x - ۳$ و $B = ۳x^{۲} - ۴x + ۲$ را درنظر می‌گیریم.

$$A \times B = (۲x - ۳)(۳x^{۲} - ۴x + ۲) = ۲x\,(۳x^{۲} - ۴x + ۲) - ۳(۳x^{۲} - ۴x + ۲)$$
$$= ۶x^{۳} - ۸x^{۲} + ۴x - ۹x^{۲} + ۱۲x - ۶ = ۶x^{۳} - ۱۷x^{۲} + ۱۶x - ۶$$

با توجه به خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع (تفریق) می‌توان نتیجه گرفت برای ضرب دو چندجمله‌ای A و B کافی است هریک از جمله‌های A را در هریک از جمله‌های B ضرب کرده و حاصل‌ضرب‌ها را ساده می‌کنیم.

مثال ۳۱ : حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $(a - ۲b)(a^{۲} + ۲ab + ۴b^{۲})$

ب) $۲۷a^{۳} - (۳a - b)(۹a^{۲} + b^{۲} + ۳ab) - ۷b^{۳}$

ج) $۱۲\left(\frac{x^{۲}}{۴} - \frac{۵x}{۲} + \frac{۱}{۳}\right) - \frac{۲}{۵}(۱۰x^{۲} - ۱۵x - ۲۰)$

د) $(۲a + b)^{۲} - (۲a - b)^{۲}$

هـ) $۲(a - b)a - ۳(a - b)b + ۵ab$

و) $۳x^{۲} - ۲(x + ۱)(x^{۲} - x + ۱)$

ز) $(a^{۹} - a^{۵})(a^{۹} + a^{۵}) - (a^{۶} - a^{۴})(a^{۱۲} + a^{۱۰} + a^{۸})$

ح) $(۳a - ۲b)(۳a + ۲b) - (۳a - ۴b)(۳a + ۴b)$

ط) $۵a^{۹} - ۵(a^{۳} - ۳b^{۲})(a^{۶} + ۳a^{۳}b^{۲} + ۹b^{۴})$

حل:

الف) $(a - ۲b)(a^{۲} + ۲ab + ۴b^{۲}) = a^{۳} + ۲a^{۲}b + ۴ab^{۲} - ۲a^{۲}b - ۴ab^{۲} - ۸b^{۳}$
$= a^{۳} - ۸b^{۳}$

ب) $۲۷a^{۳} - (۳a - b)(۹a^{۲} + b^{۲} + ۳ab) - ۷b^{۳}$
$= ۲۷a^{۳} - (۲۷a^{۳} + ۳ab^{۲} + ۹a^{۲}b - ۹a^{۲}b - b^{۳} - ۳ab^{۲}) - ۷b^{۳}$
$= ۲۷a^{۳} - ۲۷a^{۳} + b^{۳} - ۷b^{۳} = -۶b^{۳}$

ج) $۱۲\left(\frac{x^{۲}}{۴} - \frac{۵x}{۲} + \frac{۱}{۳}\right) - \frac{۲}{۵}\left(۱۰x^{۲} - ۱۵x - ۲۰\right) = ۳x^{۲} - ۳۰x + ۴ - ۴x^{۲} + ۶x + ۸$
$= -x^{۲} - ۲۴x + ۱۲$

د) $(2a+b)^2-(2a-b)^2=(2a+b)(2a+b)-(2a-b)(2a-b)$

$=4a^2+2ab+2ab+b^2-(4a^2-2ab-2ab+b^2)$

$=4a^2+4ab+b^2-4a^2+4ab-b^2=8ab$

هـ) $2(a-b)a-3(a-b)b+5ab=2a^2-2ab-3ab+3b^2+5ab$

$=2a^2+3b^2$

و) $3x^3-2(x+1)(x^2-x+1)=3x^3-2(x^3-x^2+x+x^2-x+1)$

$=3x^3-2(x^3+1)$

$3x^3-2x^3-2=x^3-2$

ز) $(a^9-a^5)(a^9+a^5)-(a^6-a^4)(a^{12}+a^{10}+a^8)$

$=a^{18}+a^{14}-a^{14}-a^{10}-(a^{18}+a^{16}+a^{14}-a^{16}-a^{14}-a^{12})$

$=a^{18}-a^{10}-a^{18}+a^{12}=a^{12}-a^{10}$

ح) $(3a-2b)(3a+2b)-(3a-4b)(3a+4b)$

$=(9a^2+6ab-6ab-4b^2)-(9a^2+12ab-12ab-16b^2)$

$=9a^2-4b^2-9a^2+16b^2=12b^2$

مثال ۳۲ : اگر:

$A=4(x^2+3)-2(x-2)(2x-3)$ و $B=14\left(2x-\frac{1}{7}\right)\left(7x+\frac{1}{2}\right)$

حاصل $(B-A^2)^{2000}$ چیست؟

حل:

$B=7\times2\left(2x-\frac{1}{7}\right)\left(7x+\frac{1}{2}\right)=(14x-1)(14x+1)=196x^2+14x-14x-1$

$=196x^2-1$

$A=4x^2+12-(2x-4)(2x-3)=4x^2+12-(4x^2-6x-8x+12)$

$=4x^2+12-4x^2+6x+8x-12=14x$

$(B-A^2)^{2000}=(196x^2-1-196x^2)^{2000}=(-1)^{2000}=1$

تمرین‌های فصل چهارم

۱. معین کنید به ازای چه مقادیری از x هریک از عبارات زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند؟

الف) $\dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)}$

ب) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2+2}$

ج) $\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt{1-x}}$

د) $\sqrt{\dfrac{-5}{2x-6}}$

هـ) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$

و) $\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{7-x}}{x\sqrt{x-1}}$

ز) $\sqrt{1-\sqrt{2-x}}$

ح) $\dfrac{2x-1}{x(2x-1)}$

ط) $\sqrt{x-2}-\sqrt{2-x}$

ی) $\dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2+x}$

۲. مقدار عددی عبارت x^4+x^2+1 را به ازای $x=\sqrt{2}$ به‌دست آورید.

۳. اولاً: مقدار عددی عبارت $5x^4-2x^3-5x^2-7x+2$ را به ازای $x=1$ حساب کنید.
ثانیاً: مجموع ضرایب عبارت فوق را به‌دست آورده و با مقدار عددی آن به ازای $x=1$ مقایسه کنید.

۴. مجموع ضرایب عبارت $(5x^3-2x^2-3x-1)^{32}$ چیست؟

۵. مقدار عددی عبارات $(a+b)^3$ و $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ را به ازای $a=2$ و $b=-3$ به‌دست آورده و با هم مقایسه کنید.

۶. مقدار عددی عبارت $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ را به ازای $a=2$ و $b=1$ و $c=-3$ به‌دست آورید.

۷. مقدار عددی $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ را به ازای $a=4$ و $b=-4$ و $c=-3$ به‌دست آورید.

۸. اگر $a=6$ و $b=8$ و $c=10$ و $p=\frac{a+b+c}{2}$ باشند، مقدار عددی عبارت s را به‌دست آورید.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۹. اگر $2a-b+5=0$ حاصل $\frac{2^{b-1}}{4^{a+1}}$ چقدر است؟

۱۰. اگر $(a+1)^{20}+(b-1)^{20}=0$ باشد، حاصل $(a^2-b^2)^{2000}$ چیست؟

۱۱. اگر $(a-4b)^{50}+(b-2c)^{100}=0$ باشد، حاصل $\frac{10ab}{c(a+b)}$ چیست؟

۱۲. مقدار عددی عبارت $(A^B)^{C^D}$ را به ازای $A=10$ و $B=D=2$ و $C=3$ به‌دست آورید.

۱۳. مقدار عددی دو عبارت $(2a)^3$ و $2a^3$ را به ازای $a=10$ به‌دست آورده و مقایسه کنید.

۱۴. مقدار عددی عبارات $5ab^2$ و $5(ab)^2$ و $(5ab)^2$ را به ازای $a=2$ و $b=3$ حساب کرده و مقایسه کنید.

۱۵. اگر A قرینه‌ی B و B معکوس C باشد، حاصل عبارت $[B^2C^2+C(A^3B+B^4)]^{20}$ را تعیین کنید.

۱۶. اگر $f(x)=3x^2-2x+1$ حاصل $f(1)$ و $f(-2)$ و $f\left(\frac{2}{5}\right)$ را حساب کنید.

۱۷. اگر $f(x)=ax^2+x+4$ و $f(1)=7$، مقدار $f(-3)$ چقدر است؟

۱۸. اگر $f(x) = 1 - 2x$، $f(1-x)$ را حساب کنید.

۱۹. اگر $f(x+2) = 3x - 1$، $f(x)$ کدام است؟

۲۰. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

الف) $\left(-\frac{7}{11}a^{3}b^{2}\right)\left(\frac{33}{5}a^{12}b^{7}\right)\left(-\frac{5}{21}a^{5}b^{11}\right)$

ب) $\frac{5}{24}a^{3}b^{5}c^{2} - \frac{1}{18}a^{3}b^{5}c^{2} + \frac{7}{36}a^{3}b^{5}c^{2}$

ج) $48a^{20}b^{30}c^{40} \div (-12)a^{15}b^{25}c^{35}$

د) $110a^{10}b^{10} + 7a^{4}b^{6} \times 2a^{6}b^{4} - (3a^{5}b^{5})^{2}$

هـ) $(5a^{5}b^{4}c^{3})^{2}(10a^{3}b^{4}c^{2})^{3} - 5000a^{19}b^{20}c^{12}$

۲۱. درجه‌ی یک‌جمله‌ای زیر را نسبت به a، b و c و هم‌چنین نسبت به همه‌ی حروف تعیین کنید.

$12a^{7}b^{2} \times \frac{3}{4}a^{5}b^{2}c^{4} \times 2b^{4}c^{6}$

۲۲. کدام‌یک از عبارات زیر متقارن و کدام‌یک همگن است؟

الف) $7a^{4} - 3a^{3}b + 7b^{4} - 3ab^{3}$

ب) $x^{5} - 2x^{2}y^{2} + y^{5} + 12$

ج) $4x^{3}y^{2} - 2y^{5} + 3x^{5}$

۲۳. مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارت زیر برحسب x و y متقارن باشد.

$f(x,y) = 5x^{2} - 2xy + 5y^{2} - y + (m-2)x$

۲۴. اگر $f(n) = \frac{n}{5}f(n+1)$ و $f(6) = \frac{5}{7}$، $f(4)$ را حساب کنید.

۲۵. اگر $f(n) = f(n-1) + 4n^{3}$، حاصل $f(1) - f(-1)$ چیست؟

۲۶. مقدار عددی عبارت $\frac{14x^{100} + 21x^{75}}{2x^{95} + 3x^{70}}$ را به ازای $x = 2$ حساب کنید.

۲۷. اگر $a=b$ نشان دهید:

$$a^۲b^۲(b-a)+b^۲c^۲(c-b)+c^۲a^۲(a-c)=۰$$

۲۸. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید:

الف) $۲a^۲\times(۲a)^۲\times۳a^۳\times(۳a)^۳$

ب) $۳ab^۲\times۳(ab)^۲\times(۳ab)^۲\times(۳a)^۲b$

ج) $(۲a^۷b^۵)^۳\times(۳a^۴b^۲)^۲$

د) $۹a^{۱۳}+۳a^۷\times۵a^۶$

هـ) $۳a^۵\times۲a^۳\times a^۴+۵a^۴\times۳a^۸$

و) $۶a^{۱۲}-a^۷(a-۲a)^۵$

ز) $(۳a^۶b^۵c^۲\times a^۲b^۴c^۶+۲a^۳b^۲c^۴\times۴a^۵b^۷c^۴)$

ح) $۱۹a^{۲۲}-[۳a^{۱۱}-a^۵(۳a^۲-۴a^۲)^۳]^۲$

۲۹.حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید:

الف) $(۴a^۲-۳a+۲ab)+(a^۲-۲a+۳ab)$

ب) $(a^۴-۲a^۲+۱)-(a^۴-۳a^۲-۷)$

ج) $۴\left(\frac{a}{۴}-\frac{b}{۲}-۱\right)-\frac{۳}{۴}(۸a-۴b-۱۲)$

د) $(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-ac-bc)$

هـ) $x+۲(۳x^۲-۱)-(۲x-۱)(۳x+۲)$

و) $a+\frac{۲}{۳}(۳a-۶b-۹)-\frac{۳}{۲}(۲a-۴b-۶)$

ز) $۲a^۵-۲a[a-a(۱-a)]^۲$

ح) $۲(۳a-۱)^۲-۳(۲a-۱)^۲-۶a^۲$

ط) $(۲ab^۲-a^۲b)(۴a^۳+۳a^۲b+b^۳)$

ی) $(۲a-b)(۴a^۲+۲ab+b^۲)(۸a^۳+b^۳)$

ک) $2a^4 - 2(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

ل) $(2x+3)(3x+4)(3x-5)$

م) $5(a-b)b - 3(a-b)a - (3a^2 - 5b^2)$

ن) $(8a^4b^5 - 12a^6b^3 - 4a^5b^4) \div 4a^3b^3$

س) $7(a+b)^2 - 7(a-b)^2$

ع) $(a^{18} - a^{12})(a^{18} + a^{12}) - (a^{12} + a^8)(a^{24} - a^{20} + a^{16})$

ف) $x^7 - x(x^2 + x)(x^4 - x^3 + x^2)$

ص) $(x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x^2 + y^2)$

ق) $a^{10} - (a+b)^2(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)^2$

ر) $156\left(x - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4}\right)y - 60\left(\frac{2y}{3} - \frac{2y}{4} + \frac{2y}{5}\right)x$

ش) $2x^3 - 2(x-2)(x^2 + 2x + 4) - 2(x-1) + 2x^2 + 4$

ت) $(a+b)(b+c) - (c+d)(d+a) - (a+c)(b-d)$

۳۰. اگر $A = 6a - 2b - 4ab$ و $B = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}ab$ باشد، حاصل عبارت $\frac{A}{2} - 3B$ را حساب کنید.

۳۱. مقدار عبارت $A - 2B - 3C$ را به ازای $A = 5x^5 - 1$ و $B = 2x^5 - 3$ و $C = \frac{x^5}{3} - 4$ به‌دست آورید.

۳۲. اگر $A = 2x^3 - 1$ و $B = 2x^3 - 4$ حاصل عبارت $3A^2 + 3B^2 - 6AB$ را پیدا کنید.

۳۳. درجه‌ی چندجمله‌ای‌های زیر را نسبت به هریک از متغیرهایشان تعیین کنید.

الف) $(x^4 - 3x^2 + 5x - x^3)^3(x^2 + x^5 + 7)^5 + x^{10}$

ب) $(x^2y^3 - x)(xy^2)^3 + (xy)(x^4y^2 + 1)$

۳۴. ثابت کنید:

$$(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)\equiv 0$$

۳۵. اگر $A=-m(2x-1)y$ و $B=4y(1-x)m$ و $C=mx-\frac{1}{2}$، حاصل عبـارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $2A-\left(\frac{1}{2}B-2C\right)$

ب) $A-\frac{B}{4}-4C$

۳۶. مقادیر a و b و c و d را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای زیر متحد با صفر باشد.

$$(2a-6)x^3-(a-2b+5)x^2+(2b-c)x-(3d-2a)$$

۳۷. دو چندجمله‌ای زیر با هم متحدند. مقادیر a و b و c و d را حساب کنید.

$$(a-1)x^3+(2a-b)x^2-(a-4b-c)x+(2c-a+d)$$

$$x^3-5x+7$$

فصل پنجم

اتحادها

اتحادها تساوی‌های جبری هستند که به ازای هر مقدار عددی که به‌جای متغیرهایشان قرار دهیم همواره برقرار باشند. به عنوان مثال تساوی $x(x+1)=x^{2}+x$ به ازای هر مقدار x برقرار است. لذا یک اتحاد می‌باشد. اما تساوی $x^{2}+1=2x$ فقط به ازای $x=1$ برقرار است. بنابراین اتحاد نیست.

در واقع تفاوت اتحاد و معادله‌ی جبری در این است که اتحاد به ازای تمام مقادیر برقرار است و معادله‌ی به ازای تعداد محدودی عدد حقیقی برقرار است.

مثال ۱ : کدام‌یک از عبارات زیر اتحاد است؟

الف) $2x(x+3)=2x^{2}+30$ **ب) $2(3x-1)=6x-2$**

حل:

الف) $2x(x+3)=2x^{2}+30 \Rightarrow 2x^{2}+6x=2x^{2}+30 \Rightarrow 6x=30 \Rightarrow x=5$

این تساوی فقط به ازای $x=5$ برقرار است. بنابراین اتحاد نیست.

$2(3x-1)=6x-2 \Rightarrow 6x-2=6x-2 \Rightarrow 6x-6x=-2+2=0\times x=0$

این تساوی به ازای همه‌ی مقادیر x برقرار است. لذا اتحاد است.

مثال ۲ : a و b را چنان تعیین کنید که تساوی زیر یک اتحاد باشد.

$$(a-b)x^{2}+2b(x-1)+a+c=x^{2}-4x+3$$

حل:

$$(a-b)x^2+2bx-2b+a+c=x^2-4x+3$$

$$(a-b)x^2+2bx+a-2b+c=x^2-4x+3$$

$$\begin{cases} a-b=1 \\ 2b=-4 \rightarrow b=-2 \\ a-2b+c=3 \end{cases}$$

$$a-b=1 \rightarrow a+2=1 \rightarrow a=-1$$

$$a-2b+c=3 \rightarrow -1+4+c=3 \rightarrow c=0$$

اتحادهای مهم جبری

۱- اتحاد نوع اول: (مربع مجموع دو جمله)

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

مثال ۳ :

الف) $(2x+3)^2=(2x)^2+2\times 2x+3+3^2=4x^2+12x+9$

ب) $(5x+2xy)^2=(5x)^2+2\times 5x\times 2xy+(2xy)^2=25x^2+20x^2y+4x^2y^2$

۲-اتحاد نوع دوم: (مربع تفاضل دو جمله)

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

$$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

مثال ۴ :

الف) $(4x-3y)^2=(4x)^2-2\times 4x\times 3y+(3y)^2=16x^2-24xy+9y^2$

ب) $(3x^2-2x)^2=(3x^2)^2-2\times 3x^2\times 2x+(2x)^2=9x^4-12x^3+4x^2$

مثال ۵ : در عبارات زیر جاهای خالی را پر کنید تا حاصل مربع یک دو جمله‌ای شود.

الف) $4x^2 - ... + 9x^2y^2$ ب) $4x^2 - 6xy + ...$

ج) $x^2y^4z^2 + 3x^2y^3z^2 + ...$ د) $25a^2x^2 + ... + b^2$

حل:

الف) $2 \times 2x \times 3xy = 12x^2y$ ب) $\left(\frac{\frac{1}{2} \times 6xy}{2x}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = \frac{9}{4}y^2$

ج) $\left(\frac{\frac{3}{2}x^2y^3z^2}{xy^2z}\right)^2 = \frac{9}{4}x^2y^2z^2$ د) $2 \times 5ax \times b = 10abx$

۳-اتحاد مربع یک سه‌جمله‌ای

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مثال ۶ :

الف) $(a-b+c)^2 = (a+(-b)+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

ب) $(2x - 3y + xy)^2 = 4x^2 + 9y^2 + x^2y^2 - 12xy - 4x^2y + 6xy^2$

ج) $(a^3 + 3a^2 - 2a)^2 = a^6 + 9a^4 + 4a^2 + 6a^5 - 4a^4 - 12a^3$
$= a^6 + 6a^5 + 5a^4 - 12a^3 + 4a^2$

مثال ۷ : اگر $a^2 = a + 3$ باشد، نشان دهید $a^5 = 19a + 21$.

حل:

$$a^5 = a \times a^4 = a \times (a+3)^2 = a(a^2 + 6a + 9) = a(a + 3 + 6a + 9) = a(7a + 12)$$
$$= 7a^2 + 12a = 7(a+3) + 12a = 19a + 21$$

۴-اتحاد مزدوج

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

مثال ۸ :

الف) $(2x-3y)(2x+3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$

ب) $(2x-y)(2x+y)=(4x^2+y^2)=(4x^2-y^2)(4x^2+y^2)=16x^4-y^4$

ج) $(x^2+1)(1-x^2)=(1+x^2)(1-x^2)=1-x^4$

د) $(3a^2-b^2)(6a^2+2b^2)=2(3a^2-b^2)(3a^2+b^2)=2(9a^4-b^4)$
$=18a^4-2b^4$

۵-اتحاد جمله‌ی مشترک

$$\boxed{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$$

$(x+a)(x+b)=x^2+bx+ax+ab=x^2+(a+b)x+ab$

الف) $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+2\times 3=x^2+5x+6$

ب) $(x-5)(x+3)=x^2+(-5+3)x+(-5)\times 3=x^2-2x-15$

ج) $(5x-6)(5x+2)=25x^2-4\times 5x-12=25x^2-20x-12$

د) $(x^2-3)(x^2-5)=x^4-8x^2+15$

هـ) $(3x^2-7)(3x^2+11)=9x^4+4\times 3x^2-77=9x^4+12x^2-77$

۶-اتحاد ششم: (مجموع مکعبات دوجمله)

$$\boxed{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-b^2a+b^3=a^3+b^3$

مثال ۹ :

الف) $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)=(2a)^3+b^3=8a^3+b^3$

ب) $(3a^2+2b^3)(9a^4-6a^2b^3+4b^6)=(3a^2)^3+(2b^3)^3=27a^6+8b^9$

۷-اتحاد هفتم: (تفاضل مکعبات دو جمله)

$$\boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=[a+(-b)][a^2-a(-b)+b^2]=a^3+(-b)^3=a^3-b^3$

مثال ۱۰:

الف) $(2a-5)(4a^2+10a+25)=(2a)^3-5^3=8a^3-125$

ب) $(a^2-2a)(a^4+2a^3+4a^2)=(a^2)^3-(2a)^3=a^6-8a^3$

۸-اتحاد مکعب مجموع دو جمله:

$$\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3 \ =a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

مثال ۱۱:

الف) $(2a+3b)^3=(2a)^3+3\times(2a)^2\times 3b+3\times 2a\times(3b)^2+(3b)^3$

$=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$

ب) $(x^2+1)^3=(x^2)^3+3(x^2)^2\times 1+3\times x^2\times 1^2+1=x^6+3x^4+3x^2+1$

ج) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

۹-اتحاد مکعب تفاضل دو جمله:

$$\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$$

$(a-b)^3=[a+(-b)]^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

مثال ۱۲:

الف) $(a^2-3b^2)^3=(a^2)^3-3(a^2)^2\times 3b^2+3a^2\times(3b^2)^2-(3b^2)^3$

$=a^6-9a^4b^2+27a^2b^4-27b^6$

ب) $(5a^2-2a^3)^2=(5a^2)^3-3\times(5a^2)^2\times 2a^3+3\times 5a^2\times(2a^3)^2-(2a^3)^3$

$125a^6-150a^7+60a^8-8a^9$

ج) $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

مثال ۱۳: اگر $a+b+c=0$ ثابت کنید: $a^3+b^3+c^3=3abc$

حل:

$$a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3 \Rightarrow a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$=-c^3 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=-3a^2b-3ab^2=3ab(-a-b)=3abc$$

مثال ۱۴ : درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

ب) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

ج) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

د) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

هـ) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

و) $(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2$

ز) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$

حل:

الف) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

ب) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

ج) $(a+b)^2-(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$

$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2=4ab$

د) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \Rightarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)$

هـ) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \Rightarrow a^3-b^3=(a-b)^3+3a^2b$

$-3ab^2=(a-b)^3+3ab(a-b)$

و) $(a+b)^3+(a-b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$=2a^3+6ab^2$

ز) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \Rightarrow a^2+b^2+c^2$

$=(a+b+c)^2-2ab-2ac-2bc=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$

مثال ۱۵ : اگر $x+y=7$ و $xy=10$ و $x>y$ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید:

الف) x^2+y^2

ب) $x-y$

ج) x^3+y^3

د) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

هـ) x^4+y^4

و) x^3-y^3

حل:

الف) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=7^2-2\times10=49-20=29$

ب) $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=29-20=9\rightarrow x-y=3$

ج) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=7^3-3\times10\times7=343-210=133$

د) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}=7+2\sqrt{10}\rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

هـ) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=29^2-2\times100=641$

و) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=3^3+3\times10\times3=27+90=117$

مثال ۱۶ : اگر $a+b+c=10$ و $a^2+b^2+c^2=50$، حاصل $ab+ac+bc$ چقدر است؟

حل:

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$$

$$50=10^2-2(ab+ac+bc)\rightarrow 2(ab+ac+bc)=50\rightarrow ab+ac+bc=25$$

مثال ۱۷ : حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید:

الف) $235^2-230^2-5^2$

ب) 850^2-750^2

ج) 497×503

د) 99^3

حل:

الف) $235^2-230^2-5^2=(230+5)^2-230^2-5^2=230^2+2300+5^2-230^2-5^2$
$=2300$

ب) $850^2-750^2=(850-750)(850+750)=100\times1600=160000$

ج) $497\times503=(500-3)(500+300)=500^2-3^2=250000-9=249991$

د) $۹۹^۳ = (۱۰۰-۱)^۳ = ۱۰۰^۳ - ۳\times۱۰۰^۲\times۱ + ۳\times۱۰۰\times۱^۲ - ۱ = ۱۰۰۰۰۰۰ - ۳۰۰۰۰$
$+۳۰۰ - ۱ = ۹۷۰۲۹۹$

مثال ۱۸ : حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(۲a+b-۵c)(۲a+b+۵c)$

ب) $(a-b+c)(a+b-c)$

ج) $(a-b-c)(b-a+c)$

د) $(a-۳)(a^۲+۹)(۲a+۶)$

هـ) $(۱+۲a)(۲a-۱)(۴a^۲+۳)$

و) $(۲a-۵)(۲a-۱)(۴a^۲+۱۲a-۵)$

ز) $(a-b)(a+b)(a^۲-ab+b^۲)(a^۲+ab+b^۲)$

ح) $(a-۳)^۴$

ط) $(a-۱)(a^۲+a+۱)(a^۳+۲)$

ی) $(a-۱)^۶$

ک) $(a-b)^۳(a+b)^۳$

ل) $(۲a-۱)^۲(۲a+۱)^۲(۴a^۲+۲)^۲$

حل:

الف) $(۲a+b-۵c)(۲a+b+۵c) = [(۲a+b)-۵c][(۲a+b)+۵c]$
$= (۲a+b)^۲ - ۲۵c^۲ = ۴a^۲ + ۴ab + b^۲ - ۲۵c^۲$

ب) $(a-b+c)(a+b-c) = [a-(b-c)][a+(b-c)] = a^۲ - (b-c)^۲$
$= a^۲ - (b^۲+c^۲-۲bc) = a^۲ - b^۲ - c^۲ + ۲bc$

ج) $(a-b-c)(b-a+c) = -(a-b-c)(a-b-c) = -(a-b-c)^۲$
$= -(a^۲+b^۲+c^۲-۲ab-۲ac+۲bc) = -a^۲-b^۲-c^۲+۲ab+۲ac-۲bc$

د) $(a-۳)(a^۲+۹)(۲a+۶) = ۲(a-۳)(a+۳)(a^۲+۹) = ۲(a^۲-۹)(a^۲+۹)$
$= ۲(a^۴-۸۱) = ۲a^۴ - ۱۶۲$

هـ) $(۱+۲a)(۲a-۱)(۴a^۲+۳) = (۴a^۲-۱)(۴a^۲+۳) = ۱۶a^۴ + ۸a^۲ - ۳$

و) $(۲a-۵)(۲a-۱)(۴a^۲+۱۲a-۵) = (۴a^۲-۱۲a+۵)(۴a^۲+۱۲a-۵)$
$= [۴a^۲-(۱۲a-۵)][۴a^۲+(۱۲a-۵)] = ۱۶a^۴ - (۱۲a-۵)^۲$
$= ۱۶a^۴ - (۱۴۴a^۲ - ۱۲۰a + ۲۵) = ۱۶a^۴ - ۱۴۴a^۲ + ۱۲۰a - ۲۵$

ز) $(a-b)(a+b)(a^۲-ab+b^۲)(a^۲+ab+b^۲)=(a^۳-b^۳)(a^۳+b^۳)$
$=a^۶-b^۶$

ح) $(a-۳)^۴=[(a-۳)^۲]^۲=(a^۲-۶a+۹)^۲=a^۴+۳۶a^۲+۸۱-۱۲a^۳+۱۸a^۲$
$-۱۰۸a=a^۴-۱۲a^۳+۵۴a^۲-۱۰۸a+۸۱$

ط) $(a-۱)(a^۲+a+۱)(a^۳+۲)=(a^۳-۱)(a^۳+۲)=a^۶+a^۳-۲$

ی) $(a-۱)^۶=\left[(a-۱)^۳\right]^۲=(a^۳-۳a^۲+۳a-۱)^۲=a^۶+۹a^۴+۹a^۲+۱-۶a^۵$
$+۶a^۴-۲a^۳-۱۸a^۳+۶a^۲-۶a=a^۶-۶a^۵+۱۵a^۴-۲۰a^۳+۱۵a^۲-۶a+۱$

ک) $(a-b)^۳(a+b)^۳=[(a-b)(a+b)]^۳=(a^۲-b^۲)^۳=a^۶-۳a^۴b^۲+۳a^۲b^۴-b^۶$

ل) $(۲a-۱)^۲(۲a+۱)^۲(۴a^۲+۲)^۲=[(۲a-۱)(۲a+۱)(۴a^۲+۲)]^۲=[(۴a^۲-۱)(۴a^۲+۲)]^۲$
$=(۱۶a^۴+۴a^۲-۲)^۲=۲۵۶a^۸+۱۶a^۴+۴+۱۲۸a^۶-۶۴a^۴-۱۶a^۲$
$=۲۵۶a^۸+۱۲۸a^۶-۴۸a^۴-۱۶a^۲+۴$

مثال ۱۹ : حاصل عبارت $(x+۳)(x+۴)(x+۵)(x+۶)-(x^۲+۹x)^۲-۳۶۰$ را حساب کنید.

حل:

$(x+۳)(x+۴)(x+۵)(x+۶)-(x^۲+۹x)^۲-۳۶۰$
$=(x^۲+۹x+۱۸)(x^۲+۹x+۲۰)-(x^۲+۹x)^۲-۳۶۰$
$=(x^۲+۹x)^۲+۳۸(x^۲+۹x)+۳۶۰-(x^۲+۹x)^۲-۳۶۰=۳۸x^۲+۳۴۲x$

۱۰- اتحاد اولر:

به ازای هر سه عدد حقیقی مانند a ، b و c ثابت کنید:

$$(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ac)=a^۳+b^۳+c^۳-۳abc$$

اثبات:

$(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ac)=a^۳+ab^۲+ac^۲-a^۲b-abc-ca^۲$
$+ba^۲+b^۳+bc^۲-ab^۲-b^۲c-abc+ca^۲+cb^۲+c^۳-abc-bc^۲-c^۲a$
$=a^۳+b^۳+c^۳-۳abc$

☆ صورت دیگر اتحاد اولر

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]=a^3+b^3+c^3-3abc$$

اثبات:

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2]$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

نتیجه: اگر $a+b+c=0$ آن‌گاه $a^3+b^3+c^3=3abc$.

نتیجه: اگر $a=b=c$ آن‌گاه $a^3+b^3+c^3=3abc$.

مثال ۲۰ :

الف) $(2x+y+1)(4x^2+y^2+1-2xy-2x-y)$

$=(2x)^3+y^3+1-3\times 2x\times y\times 1=8x^3+y^3-6xy+1$

ب) $(a^3-a^2-1)(a^6+a^4+1+a^5+a^3-a^2)=a^9-a^6-1-3a^5$

$=a^9-a^6-3a^5-1$

مثال ۲۱ : مقدار عددی عبارت $a^3+b^3+c^3$ را به ازای $a=3+\sqrt{2}$ و $b=3-\sqrt{2}$ و $c=-6$ حساب کنید.

✎ حل:

با توجه به این‌که $a+b+c$ برابر صفر می‌شود می‌توان گفت:

$$a^3+b^3+c^3=3abc=3\times(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(-6)=3\times(9-2)(-6)=-126$$

مثال ۲۲ : معادله‌ی $(1-x)^3+(2x+4)^3-(x+5)^3=0$ را حل کنید.

✎ حل:

$$(1-x)^3+(2x+4)^3-(x+5)^3=(1-x)^3+(2x+4)^3+(-x-5)^3=0$$

$$(1-x)+(2x+4)+(-x-5)=0\Rightarrow(1-x)^3+(2x+4)^3+(-x-5)^3$$

$$=3(1-x)(2x+4)(-x-5)=0$$

$$1-x=0\Rightarrow\boxed{x=1}\quad 2x+4=0\Rightarrow\boxed{x=-2}\quad -x-5=0\Rightarrow\boxed{x=-5}$$

مثال ۲۳ : اگر $a=\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{2}-1$ باشد، مقدار عددی عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8$$

✎ حل:

با توجه به این‌که $a-b=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1$ می‌توان گفت:

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8$$

$$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8=(a^4-b^4)(a^4+b^4)+b^8$$

$$=a^8-b^8+b^8=a^8=(\sqrt{2})^8=[(\sqrt{2})^2]^4=2^4=16$$

مثال ۲۴ : مقدار عددی عبارت زیر به ازای $a=10$ و $b=7$ چقدر است؟

$$(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)+b^6$$

✎ حل:

$$(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)+b^6=a^6-b^6+b^6=a^6=10^6=1000000$$

مثال ۲۵ : نشان دهید عدد 199^2-18^2 بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

✎ حل:

$$199^2-18^2=(199-18)(199+18)=181\times217=181\times7\times31$$

مثال ۲۶ :حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)$$

حل:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{6561}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{6560}{6561}$$

$$=\frac{3280}{2187}$$

مثال ۲۷ : اگر $x^2+x+1=0$ حاصل عبارت $x^3+\frac{1}{x^3}$ را حساب کنید.

حل:

$$x^2+x+1=0 \to x+1+\frac{1}{x}=0 \to x+\frac{1}{x}=-1$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\times x\times\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=(-1)^3-3(-1)=2$$

مثال ۲۸ : اگر $a^3+b^3+c^3=a+b+c=0$ و n عددی فرد باشد، حاصل عبارت $a^n+b^n+c^n$ را حساب کنید.

حل:

$a^3+b^3+c^3=3abc=0 \Rightarrow a=0$ یا $b=0$ یا $c=0$

فرض می‌کنیم $a=0$ باشد.

$$a+b+c=0 \Rightarrow b+c=0 \Rightarrow b=-c$$

$$a^n+b^n+c^n=0+(-c)^n+c^n=-c^n+c^n=0$$

مثال ۲۹ :اگر مجموع دو عدد a و b مقدار ثابتی باشد، ثابت کنید ab وقتی ماکزیمم است که $a=b$.

حل:

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab \Rightarrow ab=\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{1}{2}(a-b)^2$$

در تساوی فوق ab وقتی حداکثر مقدار خود را داراست که $(a-b)^2$ مینیمم شود.

$$(a-b)^2=0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$$

-۱۱

$$\boxed{(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+b^{n-1})=a^n-b^n}$$

مثال ۳۰ :

الف) $(2a-1)(16a^4+8a^3+4a^2+2a+1)=(2a)^5-1=32a^5-1$

ب) $(a^2-3b^2)(a^6+3a^4b^2+9a^2b^4+27b^6)=(a^2)^4-(3b^2)^4=a^8-81b^8$

۱۲- اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}+a^{n-3}b^2-...+b^{n-1})=a^n+b^n}$$

مثال ۳۱ :

الف) $(2a+3b)(16a^4-24a^3b+36a^2b^2-54ab^3+81b^4)=(2a)^5+(3b)^5$

$=32a^5+243b^5$

ب) $(a^2+a)(a^8-a^7+a^6-a^5+a^4)=(a^2)^5+a^5=a^{10}+a^5$

نکته: همان‌طور که از مثال‌های فوق برمی‌آید به‌طور کلی می‌توان گفت:

۱) a^n-b^n همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است.

۲) اگر n عددی زوج باشد a^n-b^n بر $a+b$ بخش‌پذیر است.

۳) اگر n عددی فرد باشد a^n+b^n بر $a+b$ بخش‌پذیر است.

۴) a^n+b^n بر $a-b$ بخش‌پذیر نیست.

۱۳- اتحاد لاگرانژ:

$$\boxed{(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2}$$

مثال ۳۲ :

$$(4a^2+b^2)(x^2+9y^2)=(2ax+3by)^2+(6ay-bx)^2$$

۱۴- تعمیم اتحاد جمله‌ی مشترک:

$$(x+a)(x+b)(x+c)$$
$$=x^{3}+(a+b+c)x^{2}+(ab+ac+bc)x+abc$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$
$$=x^{4}+(a+b+c+d)x^{3}+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^{2}$$
$$+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$$

مثال ۳۳ :

الف) $(x+2)(x+3)(x-4)$
$$=x^{3}+(2+3-4)x^{2}+(2\times3+2\times(-4)+3\times(-4))x+2\times3\times(-4)$$
$$=x^{3}+x^{2}-14x-24$$

ب) $(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)=x^{4}+(-2+3-4+5)x^{3}$
$$+[(-2)\times3+(-2)(-4)+(-2)\times5+3\times(-4)+(3\times5)+(-4\times5)]x^{2}$$
$$+[(-2)\times3\times(-4)+(-2)\times3\times5+(-2)\times(-4)\times5+3\times(-4)\times5]x$$
$$+(-2)\times3\times(-4)\times5=x^{4}+2x^{3}-25x^{2}-26x+120$$

۱۵- تعمیم اتحاد مربع یک چندجمله‌ای

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2+(2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_1a_n)$$
$$+(2a_2a_3+2a_2a_4+\ldots+2a_2a_n)+\ldots+2a_{n-1}a_n$$

مثال ۳۴ :

الف) $(a+b+c+d+e)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2ab+2ac+2ad$
$$+2ae+2bc+2bd+2be+2cd+2ce+2de$$

ب) $(a^3+a^2-a-1)^2=a^6+a^4+a^2+1+2a^5-2a^4-2a^3-2a^3-2a^2+2a$
$$=a^6+2a^5-a^4-4a^3-a^2+2a+1$$

۱۶- اتحاد بسط دوجمله‌ای نیوتن

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + (-1)^n b^n$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در جملات بسط، توان a از n شروع و به صفر ختم می‌شود و در هر جمله نسبت به جمله‌ی قبل از درجه‌ی a یکی کم و به درجه‌ی b اضافه می‌شود. بدین ترتیب توان b از صفر شروع و به n ختم می‌شود. ضریب هر جمله به این ترتیب به‌دست می‌آید که ضریب جمله‌ی قبل را در توان a از همان جمله ضرب کرده و بر تعداد جملاتی که تا آن جمله نوشته شده تقسیم می‌کنیم. (توجه: $n! = 1\times 2\times \dots \times n \quad n\in \mathbb{N}$)

مثال ۳۵ :

الف) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

ب) $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

ج) $(2a+b)^5 = (2a)^5 + 5(2a)^4b + 10(2a)^3b^2 + 10(2a)^2b^3 + 5(2a)b^4 + b^5$

$= 32a^5 + 80a^4b + 80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 10ab^4 + b^5$

نکاتی درباره‌ی بسط دو جمله‌ای نیوتن

۱) بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ دارای $n+1$ جمله است که برحسب a و b چندجمله‌ای درجه‌ی n متقارن و همگن است.

۲) در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ جمله‌هایی که از دو طرف به یک فاصله‌اند دارای ضریب‌های مساوی می‌باشند.

۳) مجموع ضرایب در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ برابر است با: $(1+1)^n = 2^n$

۴) مجموع ضرایب در بسط دوجمله‌ای $(a-b)^n$ برابر است با: $(1-1)^n = 0$

جدول خیام (پاسکال)

اتحادهای زیر را درنظر بگیرید؛

$(a+b)^{0}=1$

$(a+b)^{1}=a+b$

$(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$

$(a+b)^{3}=a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}$

$(a+b)^{4}=a^{4}+4a^{3}b+6a^{2}b^{2}+4ab^{3}+b^{4}$

$(a+b)^{5}=a^{5}+5a^{4}b+10a^{3}b^{2}+10a^{2}b^{3}+5ab^{4}+b^{5}$

....

اگر ضرایب این چندجمله‌ای‌ها را به ترتیب زیر بنویسید شکلی شبیه مثلث ساخته می‌شود که هر عدد این جدول غیر از یک‌ها که در رأس و امتداد ساق‌ها قرار می‌گیرند و ثابت می‌باشند. بقیه‌ی اعداد در واقع برابر مجموع دو عددی است که در سطر بالایی در قسمت چپ و راست آن عدد قرار می‌گیرند.

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

مثال ۳۶ : بسط عبارت $(x^{3}-2)^{5}$ را نوشته و مجموع ضرایب آن‌را به‌دست آورید.

حل:

$(x^{3}-2)^{5}=(x^{3})^{5}-5(x^{3})^{4}\times 2+10(x^{3})^{3}\times 2^{2}-10(x^{3})^{2}\times 2^{3}+5x^{3}\times 2^{4}-2^{5}$

$=x^{15}-10x^{12}+40x^{9}-80x^{6}+80x^{3}-32$

$$\begin{cases}1-10+40-80+80-32=-1\\(1^{3}-2)^{5}=(-1)^{5}=-1\end{cases}$$

مثال ۳۷ : در بسط عبارت $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3})^5$ مقدار جمله‌ی گویا چقدر می‌شود؟

حل:

در بسط عبارت $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3})^5$ مجموع توان‌ها همواره برابر ۵ است، پس در جمله‌ی گویا توان $\sqrt{3}$ باید ۲ و توان $\sqrt[3]{3}$ باید ۳ باشد.

$$10\times(\sqrt{3})^2\times(\sqrt[3]{3})^3=10\times3\times3=90$$

تمرین‌های فصل پنجم

۱. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(5x^3+3x^2)^2$

ب) $(2xy^2+3x^2y)^2$

ج) $(-a-b)^2$

د) $(2^{1.5}-2^{0.5})^2$

هـ) $(2a-3b)(3b-2a)$

و) $(2a^3-a)^4$

ز) $(a^2-b^2)^2(a^2+b^2)^2$

ح) $(2-3x-4x^2)^2$

ط) $(2a-3b-2ab)^2$

ی) $(a^4+2a^2+3)^2$

ک) $(2a^3-3a^2+a-4)^2$

ل) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)...(a^{32}+b^{32})$

م) $(a^{20}-a^{10})(a^{20}+a^{10})$

ن) $(2a-3b)(2a+3b)(4a^2+9b^2)$

س) $(ab-a)^2(b+1)^2(b^2+1)^2a^{-2}$

ع) $(a^2-2a)^2(a^2+2a)^2$

ف) $(a+b-c+d)(a-b-c-d)$

ص) $(a+b-c)^2(a-b+c)^2$

ق) $(a-b+c-d)(d-c-a-b)$

ر) $(2a^3-a^2-3a)(2a^3+a^2+3a)$

۲. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

ب) $(4x^2-6x)(4x^4+6x^3+9x^2)$

ج) $(x+3)^2(x^2-3x+9)^2$

د) $(2x-1)^3(4x^2+2x+1)^3$

هـ) $(2x-7)(2x-3)$

و) $(3x^2y-4)(3x^2y+7)$

ز) $(xy-3y)^2(xy+5y)^2$

ح) $(2x^2+4)^2(x^2-3)^2$

ط) $(x+2)(x^2-2x+4)(x^3-6)$

ی) $(x^3-1)(x^3+1)(x^6+5)$

ک) $(-a^{2}-2a)^{3}$

ل) $(a^{3}b^{5}-a^{2}b^{4})^{3}$

م) $(x-2y)^{3}(x^{2}+2xy+4y^{2})^{3}$

ن) $(a^{2}-a)^{6}$

س) $(x-1)^{3}(x+1)^{3}(x^{2}-x+1)^{3}(x^{2}+x+1)^{2}$

ع) $(a^{2}+1)(a^{2}-5)(a^{4}+4a^{2}+5)$

ف) $4(2a-b)^{2}(4a^{2}+b^{2})^{2}\left(a+\frac{1}{2}b\right)^{2}$

ق) $(x+1/5)(4x-6)(4x^{2}+9)$

ص) $(x-y)^{2}(x^{2}+2xy+y^{2})(x^{2}+y^{2})^{2}$

ر) $a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}\right)$

ش) $(x^{2}-3x+1)(x^{2}+5x+1)$

ت) $(a-2)^{2}(a^{2}+4)^{2}(a^{4}+16)^{2}(a^{2}+4a+4)$

ث) $x(1-x)(1+x)(x^{2}+x^{6}+x^{4})$

خ) $(y+2)(y-2)(2y^{4}+32+8y^{2})$

ذ) $(a^{2}-b^{2})(a^{4}+b^{4}+a^{2}b^{2})(a^{6}+b^{6})(a^{24}+a^{12}b^{12}+b^{24})$

۳. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(a+b-2)(a^{2}+b^{2}-ab+2a+2b+4)$

ب) $(2x-1)(2x-3)(2x+5)$

ج) $(a+1)(a+2)(a+3)$

د) $(a^{2}-b^{2})(a^{10}+a^{8}b^{2}+a^{6}b^{4}+a^{4}b^{6}+a^{2}b^{8}+b^{10})$

هـ) $(a+b)^{7}$

و) $(a-b)^{8}(a+b)^{8}$

۴. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(3a+2b)^2-(3a-2b)^2$

ب) $(a^4-4a^2)(a^4+a^2)-(a^4-2a^2)(a^4+2a^2)$

ج) $7(a^6-a^4)(a^6+a^4)-3(a^4-a^2)(a^8+a^6+a^4)$

د) $(2a+b)^3-(2a-b)^3$

و) $36a^4-4(3a^2-2b)(3a^2+b)-12a^2b$

۵. اگر $a=b+3$ باشد، نشان دهید: $a^2-b^2=3(a+b)$

۶. اگر $a-2b=7$ باشد، حاصل $5a^2-20ab+20b^2$ چقدر است؟

۷. اگر $\frac{2}{x}+2x=3$ باشد، حاصل $5x^2+\frac{5}{x^2}$ چقدر می‌شود؟

۸. اگر $a^2+ab=7$ و $b^2+ab=9$ باشد، حاصل $(a+b)$ چقدر است؟

۹. حاصل $(2-\sqrt{5})^{8}(2+\sqrt{5})^{10}$ را به‌دست آورید.

۱۰. مربع عددی را با نه برابر مربع عددی دیگر جمع کردیم. حاصل شش برابر حاصل‌ضرب همان دو عدد شد. عدد بزرگ‌تر چند برابر عدد کوچک‌تر است؟

۱۱. کم‌ترین مقدار عبارت $x^2+10x+34$ به ازای مقادیر مختلف x چیست؟

۱۲. اولین عدد مجذور کامل بعد از 32^6 چیست؟

۱۳. اگر $a^2+b^2=7ab$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ چقدر است؟ $(a>b>0)$

۱۴. مربع رقم دهگان به اضافه ۱۶ برابر مربع رقم یکان یک عدد دو رقمی مساوی ۸ برابر حاصل‌ضرب ارقامش است. نشان دهید این عدد بر ۴۱ بخش‌پذیر است.

۱۵. اگر $3a^4+3a^2b^2+3b^4=20$ و $a^4-7a^2b^2-2b^4=10$ باشد، حاصل $(2b^2-4a^2)^4$ چقدر است؟

۱۶. مجموع دو عدد ۸ و حاصل‌ضرب آن دو عدد ۱۲ است. مجموع مربعات آن دو عدد چیست؟ مجموع مکعبات دو عدد چه‌طور؟

۱۷. تفاضل دو عدد ۶ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۹۱ است. مجموع مربعات دو عدد چیست؟

۱۸. اگر $a-b=۸$ و $ab=۱۰۵$ باشد، حاصل $a^{۳}-b^{۳}$ چقدر است؟

۱۹. اگر $a+b=۱۳$ و $ab=۳۶$ حاصل $a^{۴}+b^{۴}$ چقدر می‌شود؟

۲۰. اگر مجموع دو عدد ۵۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۳۶ باشد، مجموع معکوس آن‌ها چیست؟

۲۱. مجموع دو عدد ۲۳ و حاصل‌ضرب دو عدد ۱۲۰ است. تفاضل آن دو عدد چیست؟

۲۲. اگر $x+\frac{۱}{x}=۲$ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$

ب) $x^{۲}-\frac{۱}{x^{۲}}$

ج) $۲x^{۳}+\frac{۲}{x^{۳}}$

د) $x^{۳}-\frac{۱}{x^{۳}}$

هـ) $\sqrt{x}+\sqrt{\frac{۱}{x}}$

و) $x^{۴}+\frac{۱}{x^{۴}}$

۲۳. اگر $A=\overbrace{۹۹۹...۹}^{۲۰\text{ تا}}$ مجموع ارقام $A^{۲}$ را به‌دست آورید.

۲۴. ثابت کنید اعداد $n^{۲}+۱$ و $۲n$ و $n^{۲}-۱$ به ازای هر مقدار $n>۱$ می‌توانند اندازه‌ی اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند.

۲۵. اگر $x=۲t-۱$ حاصل $۲x^{۳}-۳x^{۲}+۲x-۷$ را برحسب t به‌صورت استاندارد بنویسید.

۲۶. اگر $a=\sqrt{۳}$ و $b=\sqrt{۳}-۲$ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $(a+b)(a^{۲}+b^{۲})(a^{۴}+b^{۴})+\frac{۱}{۲}b^{۸}$

ب) $(۴a^{۲}+۴ab+۴b^{۲})+۲b^{۳}$

۲۷. اگر $a-b=5$ و $ab=-6$ حاصل a^2+b^2 و a^3-b^3 را حساب کنید.

۲۸. اگر $a+b=1$، ثابت کنید: $a^2(a+1)+b^2(b+1)=2-5ab$.

۲۹. اگر $\frac{x^2}{x^4+1}=1$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x^4}{x^8+1}$ را به‌دست آورید.

۳۰. اگر $x^2+y^2=1$ باشد، ثابت کنید: $x^6+y^6=1-3x^2y^2$.

۳۱. اگر $a+b=3$، حاصل عبارات a^3+b^3+9ab و $\frac{a^3+ab^2-9a}{a^2b}$ را به‌دست آورید.

۳۲. اگر $x^2+(2a-6)x+36$ مربع کامل باشد، مقدار a چقدر است؟

۳۳. در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) $(x+...)(...-...+4y^2)=x^3+...$

ب) $(...+5b)^3=8a^3+...+...+125b^3$

ج) $8x^3+1=(...+1)^3-3\times...(2x+...)$

د) $4x^2+...=(2x+3y)^2-...$

۳۴. اگر $x^2+x+1=0$، حاصل $5x^{234}-x^{99}$ چقدر است؟

۳۵. اگر $x^2-x+1=0$ باشد، حاصل $1+x^2+x^{1378}+x^{1420}+x^{2000}$ را حساب کنید.

۳۶. ثابت کنید عدد ۱۰۰۰۲۰۰۰۱ مربع کامل است.

۳۷. ثابت کنید عدد ۱۰۰۰۰۳۰۰۰۰۳۰۰۰۰۱ مکعب کامل است.

۳۸. ثابت کنید عدد $4^{1378}+16^{1999}-2^{5377}$ مربع کامل است.

۳۹. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که عبارت زیر مکعب کامل باشد.

$$64x^3-(7a+b)x^2+2ax-1$$

۴۰.اگر $(x+y)(x^2-xy+y^2)=2$ باشد، حاصل $\frac{x^3y^3}{x^9+y^9-8}$ را حساب کنید.

۴۱.اگر $\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=x-\frac{1}{x}$ باشد، مقدار x^2+x^{-2} را به‌دست آورید.

۴۲. اگر $a^2+b^2=1$، ثابت کنید: $3(a^4+b^4)-2(a^6+b^6)=1$

۴۳. اگر $a^2=2a+1$، ثابت کنید: $a^5=29a+12$.

۴۴. اگر $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$، ثابت کنید $a=b=c$.

۴۵. مقادیر x و y را در تساوی زیر به‌دست آورید.

$$2x^2+y^2+2xy-6x+9=0$$

۴۶. اگر $x^2-tx+1=0$ باشد، حاصل عبارت زیر را برحسب t به‌دست آورید.

$$x^4+2x^2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}$$

۴۷. $a=\sqrt{3+\sqrt{8}}$ و $b=\sqrt{3-\sqrt{8}}$ باشد، حاصل ab و a^2+b^2 و $a-b$ را حساب کنید.

۴۸. ثابت کنید:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a$$
$$+3c^2b+6abc$$

۴۹. اگر $x=20$ و $y=15$، مقدار عددی عبارت $(x+y)(x^2+y^2)+\frac{1}{5}y^4$ را حساب کنید.

۵۰. اگر $2x^2+4y^2-4xy-2x+1=0$، حاصل $x+y$ چقدر است؟

۵۱. مقادیر x، y و z را در تساوی زیر به‌دست آورید.

$$x^{2}+y^{2}+z^{2}-4x+6y-8z+29=0$$

۵۲. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$70^{2}-69^{2}+68^{2}-67^{2}+66^{2}-65^{2}+\dots+10^{2}-9^{2}$$

۵۳. اگر $\frac{x}{x^{2}+1}=\frac{1}{4}$، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{x^{2}}{x^{4}+1}$

ب) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$

۵۴. اگر $x^{3}-y^{3}=7$ و $x-y=1$، حاصل $x^{2}+y^{2}$ را حساب کنید.

۵۵. اگر $a=\sqrt{5}-2$ و $b=\sqrt{5}+2$ و $c=-2\sqrt{5}$ باشد، حاصل $a^{3}+b^{3}+c^{3}$ چقدر است؟

۵۶. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(2x-6)^{3}+(3x-6)^{3}-(5x-12)^{3}=0$$

۵۷. اگر $a^{2}+b^{2}=3ab$ باشد، مقدار عددی $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{4}$ و $\frac{a^{3}+b^{3}}{a^{3}-b^{3}}$ را حساب کنید.

۵۸. در هریک از تساوی‌های زیر مقادیر مجهول را حساب کنید.

الف) $x^{2}+y^{2}+z^{2}+75=10(x+y+z)$

ب) $5x^{2}+4y^{2}+9z^{2}-4xy-16x+54z+97=0$

۵۹. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به زاویه‌ی قائمه‌ی A رابطه‌ی $a^{2}=2bc$ برقرار است. ثابت کنید مثلث متساوی‌الساقین است.

۶۰. اگر $a>1$ و $a^{2}+\frac{1}{a^{2}}=7$ باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $a^{3}-\frac{1}{a^{3}}$

ب) $a^{3}+\frac{1}{a^{3}}$

ج) $a^{9}+\frac{1}{a^{9}}$

د) $a^{4}+a^{-4}$

۶۱. در تساوی‌های زیر مقادیر مجهول را حساب کنید.

الف) $(x^2-2x+1)^{17}+(4x^2+4xy+y^2)^{19}+(x^2+y^2-z)^{20}=0$

ب) $4(x^2+z^2-xz)+9(y^2+1)-12(y+z)+7=0$

۶۲. مقدار z را در تساوی زیر به‌دست آورید.

$$(x^3-\sqrt{2})^{10}+(x^{18}-4y)^{20}+(x^6+y^2-z)^{30}=0$$

۶۳. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^{10}}\right)$$

۶۴. حاصل عبارت زیر را به ازای $x=2$ به‌دست آورید.

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{29})$$

۶۵. اگر $2x^2-x+2=0$ مقدار عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $x^2+\frac{1}{x^2}$

ب) $x^3+\frac{1}{x^3}$

ج) $x^6+\frac{1}{x^6}$

د) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

۶۶. اگر $\frac{x^4}{x^8+1}=0/1$ و $x>0$ باشد، حاصل عبارت $x^2+\frac{1}{x^2}$ را حساب کنید.

۶۷. ثابت کنید حاصل‌ضرب چهار عدد طبیعی متوالی به اضافه‌ی ۱ مربع کامل است.

۶۸. اگر $7a^2+7b^2=13$ و $9a^2+7b^2=36+24ab$ باشد، حاصل $(4a-3b)^4$ را حساب کنید.

۶۹. از رابطه‌ی $2(xy+yz+zu)=x^2+2y^2+2z^2+u^2$ نتیجه بگیرید:

$x=y=z=u$

۷۰. با شرط $2(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+3$، حال عبارت $a^{10}+b^{20}+c^{30}$ چقدر است؟

۷۱. چندجمله‌ای زیر را برحسب توان‌های نزولی $x-1$ مرتب کنید.

$x^4-11x^3+43x^2-72x+45$

۷۲. مقادیر a، b و c را چنان تعیین کنید که تساوی زیر یک اتحاد باشد.

$ax^3+(x+2)^2+c-bx^2-4x=x^3+2x^2+4$

۷۳. اگر $A=x^2+2x$ و $B=x^2-x$ و $C=x(x^2+x-7)$، حاصل عبارت A^2+B^2-2C را حساب کنید.

۷۴. اگر $b-a=1$ و $a^2+b^2=4$، حاصل $a+b$ را به‌دست آورید.

۷۵. اگر $a^2+b^2+ab=b-a-1$ باشد، ثابت کنید: $a^{101}+b^{101}=0$.

۷۶. اگر $a^2+2b^2+2ab+b+\frac{1}{4}=0$، نشان دهید: $a-b=1$.

۷۷. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶۰ سانتی‌متر و ارتفاع وارد بر وتر آن ۱۲ سانتی‌متر است. طول وتر مثلث را حساب کنید.

۷۸. اگر $2x^2+3xy+y^2=0$ باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ چیست؟

۷۹. اگر $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ و $a+b+c=1$ و $a^2+b^2+c^2=1$ ثابت کنید:

$xy+xz+yz=0$

۸۰. اگر $A+B+C=1$ و $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=0$، ثابت کنید: $A^2+B^2+C^2=1$

۸۱. نشان دهید عبارت زیر هیچ‌گاه منفی نیست.

$2x^2+2y^2+z^2+2(xy+yz+zx)+2(x-y)+3$

۸۲. اگر $x+y=4$ و $xy=-1$، حاصل عبارت $15x^2+9y^2$ را با شرط $x>y$ به‌دست آورید.

۸۳. اولاً صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

ثانیاً: اگر $a+b+c=۱۲$ باشد، بیش‌ترین مقدار عبارت $ab+bc+ca$ چقدر است؟

$$(a+b+c)^۲=\frac{۱}{۲}[(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲]+۳(ab+bc+ca)$$

۸۴. دو عدد طبیعی بیابید که مجموع آن‌ها ۱۷ و حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم شود.

۸۵. مجموع مربعات سه مضرب متوالی عدد ۵ برابر ۳۵۰ شده است. آن سه عدد کدامند؟

۸۶. مجموع دو عدد یک و حاصل‌ضربشان $\frac{۲}{۹}$ است. مجموع مربعات و مجموع مکعبات آن دو عدد چیست؟

۸۷. اگر $xy+yz+xz=۵$ و $x+y+z=۱۰$ باشند، حاصل عبارت $x^۲+y^۲+z^۲$ را حساب کنید.

۸۸. اگر $a^۲+b^۲-۶ab=۰$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ را حساب کنید. $(a>b>۰)$

۸۹. اگر $\frac{ab}{a^۲+b^۲}=\frac{۱}{۴}$، حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ را حساب کنید.

۹۰. اگر $a+b+c=۰$ و $a^۲+b^۲+c^۲=۱$، حاصل $a^۴+b^۴+c^۴$ را به‌دست آورید.

۹۱. اگر $x(۱+y)+y(۱+z)+z(۱+x)=۶\sqrt{xyz}$، ثابت کنید: $xyz=۱$. (x و y و z اعداد حقیقی مثبت هستند.)

راهنمایی: عبارت فوق را به‌صورت مجموع سه مربع کامل متحد با صفر تبدیل کنید.

۹۲. اگر $a=x-۳m$، $b=x-m$، $c=x+m$ و $d=x+۳m$ باشند، ثابت کنید عبارت زیر مربع کامل است. $abcd+(b-c)^۴$

۹۳. اگر $a-b=۰/۱$، ثابت کنید:

الف) $(a+b)(a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴)(a^۸+b^۸)=۱۰a^{۱۶}-۱۰b^{۱۶}$

ب) $a^n+a^{n-۱}b+a^{n-۲}b^۲+...+b^n=۱۰a^{n+۱}-۱۰b^{n+۱}$

۹۴. اگر $a+b-c=1$ باشد، ثابت کنید:

$$a^2+b^2-c^2=1-2ab+2c$$

۹۵. ثابت کنید:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2[(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)]$$

۹۶. اگر $a+b+c=0$، ثابت کنید:

$$2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$$

۹۷. اگر $a+b+c=4$ و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{4}$ و $abc=12$ باشد، حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

الف) $a^2+b^2+c^2$

۹۸. اگر $x+y+z=1$ و $x^2+y^2+z^2=2$ و $x^3+y^3+z^3=3$ باشد، حاصل $x^4+y^4+z^4$ را حساب کنید.

۹۹. اگر $x=b+c-2a$ و $y=c+a-2b$ و $z=a+b-2c$، حاصل عبارت $x^3+y^3+z^3-3xyz$ چقدر است؟

۱۰۰. ده نفر در مسابقه‌ی تنیس روی میز شرکت کرده‌اند. هر دو نفر از آن‌ها بین خودشان یک مسابقه انجام داده‌اند. اولین بازیکن x_1 برد و y_1 باخت. دومین بازیکن در طول مسابقات x_2 برد و y_2 باخت و ... و دهمین بازیکن x_{10} برد و y_{10} باخت داشته‌اند. ثابت کنید:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2+\dots+y_{10}^2$$

فصل ششم

تجزیه‌ی عبارات جبری

تجزیه‌ی یک عبارت جبری یعنی آن عبارت را به‌صورت حاصل‌ضرب دو یا چند عبارت جبری با ضرایب صحیح تبدیل کنیم. عباراتی مانند $x+y$ و $2x+3y$ و x^2+1 را نمی‌توان به حاصل‌ضرب عبارات جبری با ضرایب صحیح تبدیل کرد. اما عبارت جبری x^2+x و $4x^2-y^2$ و $a^2-2ab+b^2$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب عبارات جبری دیگر نوشت که چگونگی آن را توضیح می‌دهیم.

روش‌های گوناگون تجزیه

۱- تجزیه به‌کمک فاکتورگیری:

در این روش از بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک جملات جبری فاکتور می‌گیریم.

مثال ۱:

الف) $2ab+3b=b(2a+3)$

ب) $5a^2b^3+10a^3b^2=5a^2b^2(b+2a)$

ج) $18a^4b^2c^4+12a^2b^4c^4+24a^4b^4c^2=6a^2b^2c^2(3a^2c^2+2b^2c^2+4a^2b^2)$

د) $4a^2(a+b)+8a(a+b)=4a(a+b)(a+2)$

هـ) $2(a-b)^2-(a-b)=(a-b)[2(a-b)-1]=(a-b)(2a-2b-1)$

۲-روش دسته‌بندی و فاکتورگیری:

اگر تمام جمله‌های موجود در یک عبارت دارای عامل مشترک نباشند، جملات را دسته‌بندی کرده و در هر دسته از عامل مشترک فاکتور می‌گیریم، به طوری‌که در مرحله‌ی بعد نیز فاکتور مشترکی ظاهر شود.

مثال ۲:

الف) $ac+bc+ad+bd=(ac+ad)+(bc+bd)$

$=a(c+d)+b(c+d)$

$=(c+d)(a+b)$

ب) $ac-bc+ad-bd=a(c+d)-b(c+d)$

$=(c+d)(a-b)$

ج) $6ax+9ay-4bx-6by=3a(2x+3y)-2b(2x+3y)$

$=(2x+3y)(3a-2b)$

د) $a^5-a^4+a^3-a^2=(a^5-a^4)+(a^3-a^2)=a^4(a-1)+a^2(a-1)$

$=(a-1)(a^4+a^2)=a^2(a-1)(a^2+1)$

۳-تجزیه به کمک اتحادهای اول و دوم:

یادآوری می‌کنیم که:

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

مثال ۳:

الف) $x^2+6x+9=(x+3)^2$

ب) $25a^2-30ab+9b^2=(5a-3b)^2$

ج) $4x^2+12xy+9y^2=(2x+3y)^2$

د) $2x-x^2-1=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2$

۴-تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

یادآوری می‌کنیم که:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مثال ۴:

الف) $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

ب) $4a^2 - 9b^2 = (2a+3b)(2a-3b)$

ج) $x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

د) $(2a+b)^2 - 25 = (2a+b-5)(2a+b+5)$

هـ) $1-(2x-3)^2 = [1-(2x-3)][1+(2x-3)]$
$= (1-2x+3)(1+2x-3)$
$= (4-2x)(2x-2)$
$= 4(2-x)(x-1)$

و) $(4x+3)^2 - (3x-1)^2 = [(4x+3)-(3x-1)][(4x+3)+(3x-1)]$
$= (4x+3-3x+1)(4x+3+3x-1)$
$= (x+4)(7x+2)$

۵-تجزیه به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک:

یادآوری می‌کنیم که:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

مثال ۵:

الف) $x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$

ب) $x^2 - 7x - 60 = (x-12)(x+5)$

ج) $4x^2 - 20x + 21 = (2x)^2 - 10\times(2x) + 21 = (2x-3)(2x-7)$

د) $9x^2 - 9xy - 10y^2 = (3x)^2 - 3y\times(3x) - 10y^2 = (3x+2y)(3x-5y)$

هـ) $25x^2 - 5x - 42 = (5x-7)(5x+6)$

و) $(x-2y)^2 - (x-2y) - 20 = (x-2y-5)(x-2y+4)$

در صورتی‌که ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم مجذور کامل نباشد سه جمله‌ای را در ضریب درجه‌ی ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم تا ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم مجذور کامل شود. سپس از اتحاد جمله‌ی مشترک استفاده می‌کنیم.

مثال ۶ :

الف) $۲x^{۲}+۷x+۳=\frac{۱}{۲}(۴x^{۲}+۷\times ۲x+۶)$

$=\frac{۱}{۲}(۲x+۱)(۲x+۶)$

$=(۲x+۱)(x+۳)$

ب) $۶x^{۲}-x-۱=\frac{۱}{۶}(۳۶x^{۲}-۶x-۶)$

$=\frac{۱}{۶}(۶x-۳)(۶x+۲)=\frac{۱}{۶}\times ۳(۲x-۱)\times ۲\times (۳x+۱)$

$=(۲x-۱)(۳x+۱)$

۶- تجزیه به کمک اتحادهای تفاضل مکعبات و مجموع مکعبات دو جمله:

یادآوری می‌شود که:

$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$

$a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$

مثال ۷ :

الف) $۸a^{۳}+b^{۳}=(۲a+b)(۴a^{۲}-۲ab+b^{۲})$

ب) $۲۷a^{۳}-۱=(۳a-۱)(۹a^{۲}+۳a+۱)$

ج) $۶۴a^{۳}-۲۷=(۴a-۳)(۱۶a^{۲}+۱۲a+۹)$

د) $a^{۳}+۱۲۵=(a+۵)(a^{۲}-۵a+۲۵)$

۷- تجزیه با افزودن و کاستن:

در این روش جمله‌ای را به عبارت جبری اضافه و از آن کم می‌کنیم. سپس به کمک اتحادها عبارت جبری را تجزیه می‌کنیم.

مثال ۸ :

الف) $x^۴+۴=(x^۴+۴x^۲+۴)-۴x^۲=(x^۲+۲)^۲-(۲x)^۲$

$(x^۲+۲-۲x)(x^۲+۲+۲x)$

ب) $a^۴+a^۲b^۲+b^۴=(a^۴+۲a^۲b^۲+b^۴)-a^۲b^۲=(a^۲+b^۲)^۲-(ab)^۲$

$(a^۲+b^۲-ab)(a^۲+b^۲+ab)$

ج) $a^۴+b^۴+c^۴-۲a^۲b^۲-۲a^۲c^۲-۲b^۲c^۲$

$=a^۴+b^۴+c^۴-۲a^۲b^۲-۲a^۲c^۲+۲b^۲c^۲-۴b^۲c^۲$

$=(a^۲-b^۲-c^۲)^۲-۴b^۲c^۲=(a^۲-b^۲-c^۲-۲bc)(a^۲-b^۲-c^۲+۲bc)$

$=\left[a^۲-(b^۲+c^۲+۲bc)\right]\left[a^۲-(b^۲+c^۲-۲bc)\right]$

$=[a^۲-(b+c)^۲][a^۲-(b-c)^۲]$

$=(a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

د) $a^{۱۰}+a^۵+۱=(a^{۱۰}+a^۹+a^۸)-(a^۹+a^۸+a^۷)+(a^۷+a^۶+a^۵)$

$-(a^۶+a^۵+a^۴)+(a^۵+a^۴+a^۳)-(a^۳+a^۲+a)+(a^۲+a+۱)$

$=a^۸(a^۲+a+۱)-a^۷(a^۲+a+۱)+a^۵(a^۲+a+۱)-a^۴(a^۲+a+۱)$

$+a^۳(a^۲+a+۱)-a(a^۲+a+۱)+(a^۲+a+۱)$

$=(a^۲+a+۱)(a^۸-a^۷+a^۵-a^۴+a^۳-a+۱)$

۸-تجزیه‌های ترکیبی:

در این نوع تجزیه‌ها از برخی از روش‌های قبلی توأماً استفاده می‌کنیم.

مثال ۹ :

الف) $۸x^۲+۸x+۲=۲(۴x^۲+۴x+۱)=۲(۲x+۱)^۲$

ب) $۲۰x^۲-۱۰۰x+۱۲۵=۵(۴x^۲-۲۰x+۲۵)=۵(۲x-۵)^۲$

ج) $۳x^۲-۲۷y^۲=۳(x^۲-۹y^۲)=۳(x-۳y)(x+۳y)$

د) $۴x^۴-۴=۴(x^۴-۱)=۴(x^۲-۱)(x^۲+۱)=۴(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)$

هـ) $x^2-y^2-2x+1=(x^2-2x+1)-y^2=(x-1)^2-y^2$
$=(x-1-y)(x-1+y)$

و) $x^2-y^2+2y-1=x^2-(y^2-2y+1)=x^2-(y-1)^2$
$=[x-(y-1)][x+(y-1)]=(x-y+1)(x+y-1)$

ز) $5x^2-40x+75=5(x^2-8x+15)=5(x-3)(x-5)$

ح) $50x^2-30xy-56y^2=2(25x^2-15xy-28y^2)$
$=2[(5x)^2-3y(5x)-28y^2]$
$=2(5x-7y)(5x+4y)$

ط) $(x+1)^2-13x-61=(x+1)^2-13x-13-48$
$=(x+1)^2-13(x+1)-48$
$=(x+1-16)(x+1+3)$
$=(x-15)(x+4)$

ی) $x^4-10x^2+9=(x^2-1)(x^2-9)$
$=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$

ک) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$
$=(x-2)(x+1)(x-3)(x+2)$

ل) $a^6-b^6=(a^3-b^3)(a^3+b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

م) $x^4+4x^2y^2+16y^4=(x^4+8x^2y^2+16y^4)-4x^2y^2$
$=(x^2+4y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+4y^2-2xy)(x^2+4y^2+2xy)$

ن) $a^3+b^3-a^2+ab-b^2=(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)$
$=(a^2-ab+b^2)(a+b-1)$

۹- تجزیه به کمک اتحاد اولر و نتایج آن:

یادآوری:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$$

حالت‌های خاص:

$$a=b=c \Rightarrow a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}=۳abc$$
$$a+b+c=۰ \Rightarrow a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}=۳abc$$

مثال ۱۰ :

الف) $۸x^{۳}+y^{۳}+۱-۶xy=(۲x+y+۱)(۴x^{۲}+y^{۲}+۱-۲xy-۲x-y)$

ب) $a^{۳}+(۲-a)^{۳}-۸=۳a(۲-a)(-۲)=۶a(a-۲)$

ج) $(۲a-b)^{۳}-(a-b)^{۳}-a^{۳}=(۲a-b)^{۳}+(b-a)^{۳}+(-a)^{۳}$
$=۳(۲a-b)(b-a)(-a)=۳a(۲a-b)(a-b)$

د) $(a-b)^{۳}+(b-c)^{۳}-(a-c)^{۳}=(a-b)^{۳}+(b-c)^{۳}+(c-a)^{۳}$
$=۳(a-b)(b-c)(c-a)$

۱۰- تجزیه به کمک اتحادهای:

$$a^{n}-b^{n}=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+a^{n-۳}b^{۲}+...+ab^{n-۲}+b^{n-۱})$$

$$a^{n}+b^{n}=(a+b)(a^{n-۱}-a^{n-۲}b+a^{n-۳}b^{۲}-\cdots-ab^{n-۲}+b^{n-۱})$$ (n فرد است)

مثال ۱۱ :

الف) $a^{۵}-۱=(a-۱)(a^{۴}+a^{۳}+a^{۲}+a+۱)$

ب) $a^{۵}+۳۲=(a+۲)(a^{۴}-۲a^{۳}+۴a^{۲}-۸a+۱۶)$

مثال ۱۲ : جملات جبری زیر را تجزیه کنید:

الف) $ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)$

ب) $(x+۲)(x+۳)(x+۵)(x+۴)-۱۲۰$

ج) $(a+b+c)^{۳}-a^{۳}-b^{۳}-c^{۳}$

د) $(a-b-c)^{۳}+(۲b-a-c)^{۳}+(۲c-b)^{۳}$

هـ) $y^{۳}(a-x)-x^{۳}(a-y)+a^{۳}(x-y)$

حل:

الف) $ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)$

$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+ac(c-a)$

$=b(a^2-c^2)-b^2(a-c)-ac(a-c)$

$(a-c)(ba+bc-b^2-ac)=(a-c)[b(a-b)-c(a-b)]$

$=(a-c)(a-b)(b-c)$

ب) $(x+2)(x+3)(x+5)(x+4)-120$

$=[(x+2)(x+5)][(x+3)(x+4)]-120$

$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-120$

$=(x^2+7x)^2+22(x^2+7x)+120-120$

$=(x^2+7x)^2+22(x^2+7x)=(x^2+7x)(x^2+7x+22)$

$=x(x+7)(x^2+7x+22)$

ج) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=[(a+b+c)^3-a^3]-(b^3+c^3)$

$=(a+b+c-a)[(a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2]-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$=(b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+a^2+ab+ac+a^2-b^2+bc-c^2)$

$=(b+c)(3a^2+3ab+3ac+3bc)=3(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$

$=3(b+c)[a(a+b)+c(a+b)]=3(b+c)(a+b)(a+c)$

د) $(a-b-c)^3+(2b-a-c)^3+(2c-b)^3$

$=3(a-b-c)(2b-a-c)(2c-a)$

با توجه به این‌که:

$(a-b-c)+(2b-a-c)+(2c+b)=0$

هـ) $y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)$

$=y^3a-y^3x-x^3a+x^3y+a^3(x-y)$

$=-a(x^3-y^3)+xy(x^2-y^2)+a^3(x-y)$

$=(x-y)[-a(x^2+xy+y^2)+xy(x+y)+a^3]$

$$=(x-y)[-ax^{۲}-axy-ay^{۲}+x^{۲}y+xy^{۲}+a^{۳}]$$

$$=(x-y)[x^{۲}(y-a)+xy(y-a)-a(y^{۲}-a^{۲})]$$

$$=(x-y)(y-a)[x^{۲}+xy-ay-a^{۲}]$$

$$=(x-y)(y-a)[(x-a)(x+a)+y(x-a)]$$

$$=(x-y)(y-a)(x-a)(x+a+y)$$

۱۱- تجزیه به کمک شکستن برخی از جملات:

در این روش بعضی از جملات را به‌صورت مجموع یا تفاضل دو جمله‌ی دیگر می‌نویسیم. سپس به روش بسته‌بندی و فاکتورگیری عبارت جبری را تجزیه می‌کنیم.

مثال ۱۳:

الف) $۲x^{۲}+۵x-۳=۲x^{۲}-x+۶x-۳$

$$=x(۲x-۱)+۳(۲x-۱)$$

$$=(۲x-۱)(x+۳)$$

ب) $۲x^{۳}-۵x^{۲}+۵x-۳=۲x^{۳}-۳x^{۲}-۲x^{۲}+۳x+۲x-۳$

$$=x^{۲}(۲x-۳)-x(۲x-۳)+(۲x-۳)$$

$$=(۲x-۳)(x^{۲}-x+۱)$$

ج) $a^{۵}-۲a^{۲}+۱=a^{۵}-a^{۲}-a^{۲}+۱=a^{۲}(a^{۳}-۱)-(a^{۲}-۱)$

$$=(a-۱)[a^{۲}(a^{۲}+a+۱)-(a+۱)]=(a-۱)(a^{۴}+a^{۳}+a^{۲}-a-۱)$$

مثال ۱۴: ثابت کنید: $(a+b)^{۴}-(a-b)^{۴}=۸ab(a^{۲}+b^{۲})$

✎ حل:

$$(a+b)^{۴}-(a-b)^{۴}=[(a+b)^{۲}-(a-b)^{۲}][(a+b)^{۲}+(a-b)^{۲}]$$

$$=۴ab\times(۲a^{۲}+۲b^{۲})=۸ab(a^{۲}+b^{۲})$$

مثال ۱۵: ثابت کنید:

$$(a+b)(a+۲b)(a+۳b)(a+۴b)+b^{۴}=(a^{۲}+۵ab+۵b^{۲})^{۲}$$

حل:

$$(a+b)(a+4b)(a+2b)(a+3b)+b^4$$
$$=(a^2+5ab+4b^2)(a^2+5ab+6b^2)+b^4$$
$$=(a^2+5ab)^2+10b^2(a^2+5ab)+25b^4=(a^2+5ab+5b^2)^2$$

مثال ۱۶ : اگر $(a+b+c)^2-2(ac+bc+c^2)+c^2=10$ باشد، مقدار عددی $(2a+2b)^4$ را به‌دست آورید.

حل:

$$(a+b+c)^2-2(ac+bc+c^2)+c^2=10$$
$$[(a+b+c)-c]^2=10 \rightarrow (a+b)^2=10$$
$$2^2\times(a+b)^2=4\times10 \Rightarrow (2a+2b)^2=40$$

تمرین‌های فصل ششم

۱. چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $35a^3b - 77a^2b + 14ab$

ب) $4a^2b(a+b) + 2ab^2(a+b)$

ج) $25a^2 + 30a^3 - 35a^6$

د) $8ax - bx + 8ay - by$

هـ) $a^3 - 2a + a^2 - 2$

و) $x^2 + ax + ab + bx$

ز) $9a^2 + 12ab + 4b^2$

ح) $(a-b)^2 + 2(b-a) + 1$

ط) $a^8 + 6a^4 + 9$

ی) $5b^4 + 10b^2 + 5$

ک) $a^8 - 32a^4 + 256$

ل) $16x^4 - 625$

م) $121a^3x - 49ax^3$

ن) $2 - 2(x-3)^2$

س) $(x+1)^4 - (x-1)^4$

ع) $3x^5 - 48xy^4$

ف) $b^2y - b^2 - a^2y + a^2$

ص) $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y$

ق) $x^2 + 10y - y^2 - 25$

ر) $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$

ش) $(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2$

ت) $1 - 4x^2 - y^2 - 4xy$

۲. عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^2 - 19x + 48$

ب) $100x^2 + 40x - 21$

ج) $x^4 - 17x^2 + 16$

د) $16x^4 - 52x^2 + 36$

هـ) $x^6 - 7x^3 - 8$

و) $a^4 + a^3 + a^2 - 2a - 3$

ز) $x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4$

ح) $(x^2+3x)^2 - 2(x^2+3x) - 8$

ط) $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

ی) $(x^{2}-5x)^{2}-36$

ک) $(18a^{3}+4b^{3})^{2}-(9a^{3}-5b^{3})^{2}$ ل) $(x^{5}-1)-x^{2}(x-1)$

م) $(x^{4}+x^{2}+1)^{2}-24x^{4}-24x^{2}+39$

ن) $5x^{5}-5x(25x^{2}-144)$

س) $11x^{2}+15x-14$ ع) $x^{4}+y^{4}-11x^{2}y^{2}$

ف) $4x^{4}-5x^{2}y^{2}+y^{4}$ ص) $x^{4}-47x^{2}y^{2}+y^{4}$

ق) $a^{3}-27b^{3}$ ر) $16a^{3}-54$

ش) $a^{6}-b^{6}$ ت) $a^{9}-b^{9}$

۳. عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $(x+y+1)^{2}-x-y-3$ ب) $4a^{2}+9b^{2}+12ab-2a-3b-12$

ج) $(x^{2}-3x)^{2}-14(x^{2}-3x)+40$ د) $(a+b)^{2}-5a-5b+4$

هـ) $a^{8}-5a^{4}+4$ و) $x^{2}+4xy+4y^{2}-2x-4y-3$

ز) $x^{7}+x^{4}-16x^{3}-16$ ح) $x^{8}+x^{4}+1$

ط) $a^{3}+a-10$ ی) $3x^{3}-5x+2$

ک) $a^{2}-c^{2}-2(ad-bc)-b^{2}+d^{2}$ ل) $ax^{3}+x^{2}+x+1-a$

م) $4a^{2}b^{2}-(a^{2}+b^{2}-c^{2})^{2}$ ن) $8a^{3}+b^{3}-4a^{2}b-2ab^{2}$

س) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

ع) $x^{3}+3x^{2}+5x+6$

۴. عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $(x^{4}+36)^{2}-25x^{2}(x^{4}+36)+156x^{4}$

ب) $x^{4}+x^{3}+x^{2}+4x+3$

ج) $x^{4}+2x^{3}-7x^{2}-8x+12$ د) $x^{3}(x^{2}-7)^{2}-36x$

هـ) $xy^{2}-xz^{2}+yz^{2}-yx^{2}+zx^{2}-zy^{2}$

و) $a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-b)+c^2a^2(a-c)$

ز) $(a^2-b^2)^3-(c^2-b^2)^3+(c^2-a^2)^3$

ح) $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

ط) $x^2+4y^2-5x+10y-4xy-24$

س) $(a+b)^2+(a-b)^2-(a^2-b^2)^2-1$

ک) $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$

ل) $8x^3-y^3-1-6xy$

ل) $2a^2(b^2+c^2)-b^2(2c^2+b^2)-(a^4+c^4)$

م) $a^{10}+a^2+2$

ن) $y(x-2z)^2+8xyz+x(y-2z)^2-2z(x+y)^2$

س) $a^3-7a^2+7a+15$

ف) $(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)$

ع) $9x^2+3(3y-1)x+(2y+1)(y-2)$

ق) $(a^2-b^2)x^2+2(ad-bc)x+d^2-c^2$

ص) $(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc$

ش) $(a^3-b^3)^3-(c^3-b^3)^3+(c^3-a^3)^3$

ر) $(ax-by)^2-(ay-bx)^2$

۵. مقدار عددی عبارت $40x^{18}-60x^{12}+30x^6-5$ را به ازای $x=2$ به‌دست آورید.

۶. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A=3\times5\times17\times\ldots\times(1+2^{64})$$

۷. اگر $2a-b=10$، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

الف) $8a^3-12a^2b+6ab-b^3$ ب) $b^2+4a^2-4ab+2b-4a+1$

۸. ثابت کنید عبارت زیر به ازای هرمقدار x نامنفی است:

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$$

۹. اگر $x=a+2b-3c$ و $y=2a+4b-c$ باشد، ثابت کنید:

$$8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3=-125c^3$$

۱۰. ثابت کنید:

$$(a+b+c)^3+3(b+c)^2(a+b+c)-3(b+c)(a+b+c)^2-(b+c)^3=a^3$$

۱۱. ثابت کنید:

$$(a+b+1)^2+b^2-2b(a+b+1)=(a+1)^2$$

۱۲. اگر $a+b+c=0$، ثابت کنید:

$$(2a-b)^3+(2b-c)^3+(2c-a)^3=3(2a-b)(2b-c)(2c-a)$$

۱۳. اگر $4x^2=3(2x-3)$، حاصل $64x^6-3^6$ چقدر است؟

۱۴. اگر $a^2=b^2+c^2$، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2$$

۱۵. مجموع مکعبات سه عدد متوالی ۲۱۶ می‌باشد. آن سه عدد کدامند؟

۱۶. معادلات زیر را حل کنید:

الف) $8x^3-12x^2+6x-1=0$

ب) $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

ج) $(5-2x)(2x+7)=4x^2-25$

د) $4(2x+7)^2-9(x+3)^2=0$

هـ) $(4x^2-3x-18)^2-(4x^2+3x)^2=0$

۱۷. ثابت کنید: $a^4-2a^2(a^2-b^2)+(a^2-b^2)^2-b^4=0$

۱۸. اگر $a+b+c=2p$ ثابت کنید:

$$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4=16p(p-a)(p-b)(p-c)$$

۱۹. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(۳x^۲-۹)^۳-(x^۲-۱)^۳=(۲x^۲-۸)^۳$

ب) $(x-۲)^۳+(x-۶)^۳-(۲x-۸)^۳=۰$

۲۰. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$۵۰^۲-۴۹^۲+۴۸^۲-۴۷^۲+...+۲^۲-۱^۲$

۲۱. اگر $x=۳a+b-۴$ و $y=۲a+\frac{۲}{۳}b-۳$، حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$۸x^۳-۳۶x^۲y+۵۴xy^۲-۲۷y^۳$

۲۲. نشان دهید عبارت زیر بر $x-۲$ بخش‌پذیر است. سپس آن‌را تجزیه کنید.

$۶x^۳-۵x^۲-۱۷x+۶$

۲۳. ثابت کنید $x^۳+y^۹$ بر $x+y^۳$ بخش‌پذیر است.

۲۴. ثابت کنید $۳۷^{۱۹}-۱۷^{۱۹}$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

۲۵. ثابت کنید $۸^{۲۴۱}+۷^{۷۲۳}$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۲۶. نشان دهید عدد $۴۷^{۲۰}-۱۷^{۲۰}$ بر اعداد ۳۰ و ۶۴ قابل قسمت است.

۲۷. ثابت کنید اگر a عددی صحیح باشد، عدد $(۲a+۱)^۲-۱$ بر ۸ قابل قسمت است.

۲۸. ثابت کنید تفاضل مربع‌های دو عدد فرد متوالی بر ۸ قابل قسمت است.

۲۹. ثابت کنید $۲^۹-۱$ بر ۷۳ بخش‌پذیر است.

۳۰. ثابت کنید $۵^۶-۱۰^۴$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۳۱. ثابت کنید $۴۱^۳+۱۹^۳$ بر ۲۰ بخش‌پذیر است.

۳۲. ثابت کنید $۱۳^{۲n}-۱$ و $۱۳^{۲^n}-۱$ بر ۱۶۸ بخش‌پذیرند.

۳۳. ثابت کنید $(x-y)^۳+(y-z)^۳+(z-x)^۳$ بر $(x-y)(y-z)(z-x)$ بخش‌پذیر است.

۳۴. اگر $\frac{x^{2}-xy-2y^{2}}{x^{2}-2xy}=6$ و $x+y=42$ باشد، حاصل $x-y$ چقدر است؟

۳۵. اگر $x^{2}+y^{2}=4(x-y-2)$ باشد، حاصل $x+y$ چیست؟

۳۶. اگر A و B به‌صورت زیر باشند، حاصل $(A^{4}+B^{5})^{2000}$ را حساب کنید:

$$A=(1+x+x^{2}+...+x^{50})(1+x^{-1}+x^{-2}+...+x^{-50})^{-1}$$

$$B=(x^{70}-x^{20}+1)(x^{70}+x^{20}+1)-(x^{70}+1)^{2}$$

۳۷. اگـــر $5a^{3}-17a^{2}+2a=3$ و $3a^{3}+5a^{2}+4a=8$ باشـــد، حاصـــل عبـــارت $(2a-1)^{6}$ را حساب کنید.

۳۸. اعداد مخالف صفر x و y و z در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$x^{2}y^{2}+y^{2}z^{2}+z^{2}x^{2}=xyz(x+y+z)$$

ثابت کنید: $x=y=z$.

۳۹. اگر:

$$(y-z)^{2}+(z-x)^{2}+(x-y)^{2}$$
$$=(y+z-2x)^{2}+(z+x-2y)^{2}+(x+y-2z)^{2}$$

باشد، ثابت کنید $x=y=z$.

۴۰. بزرگ‌ترین توان ۲ که عدد $A=3^{128}-1$ بر آن بخش‌پذیر است، چیست؟

فصل هفتم

عبارات گویا

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک چندجمله‌ای‌ها

برای تعیین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک جمله‌های جبری ابتدا هر کدام از آن‌ها را تجزیه می‌کنیم، سپس از میان عامل‌های مشترک آن توانی را انتخاب می‌کنیم که نمایش کوچک‌تر است و این عامل‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

برای محاسبه‌ی کوچک‌ترین مضرب مشترک جمله‌های جبری، پس از تجزیه‌ی هر کدام از جمله‌ها، عامل‌های مشترک را با توان بزرگ‌تر و عامل‌های غیرمشترک را انتخاب کرده در هم ضرب می‌کنیم.

مثال ۱ : بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک جمله‌های زیر را تعیین کنید.

$$\mathbf{۳۶a^{۲}b^{۲}c^{۲}} \quad \text{و} \quad \mathbf{۲۴ab^{۴}c^{۳}} \quad \text{و} \quad \mathbf{۱۶a^{۲}b^{۳}cd}$$

حل:

$$۳۶a^{۲}b^{۲}c^{۲} = ۲^{۲} \times ۳^{۲} \times a^{۲}b^{۲}c^{۲}$$

$$۲۴ab^{۴}c^{۴} = ۲^{۳} \times ۳ \times ab^{۴}c^{۴}$$

$$۱۶a^{۳}b^{۳}cd = ۲^{۴} \times a^{۲}b^{۳}cd$$

$$\text{ب. م. م} = ۲^{۲} \times a \times b^{۲} \times c = ۴ab^{۲}c$$

$$\text{ک. م. م} = ۲^{۴} \times ۳^{۲} \times a^{۲} \times b^{۴} \times c^{۴} \times d = ۱۴۴a^{۲}b^{۴}c^{۴}d$$

مثال ۲ : عبارات جبری A، B، C و D به‌صورت زیر تجزیه شده‌اند. ب. م. م و ک. م. م این عبارات را به‌دست آورید.

$$A = ۲^۳ \times ۳ \times ۵ \times (x-۱)^۲(x+۱) \qquad B = ۲^۲ \times ۳^۲ \times (x-۱)(x+۲)^۲$$

$$C = ۲^۴ \times ۵^۲ \times (x-۱)^۳ \qquad D = ۲ \times ۳^۲ \times (x-۱)^۴(x+۱)^۲$$

✎ حل:

ب. م. م $= ۲(x-۱)$

ک. م. م $= ۲^۴ \times ۳^۲ \times ۵^۲ \times (x-۱)^۴(x+۱)^۲(x+۲)^۲ = ۳۶۰۰(x-۱)^۴(x+۱)^۲(x+۲)^۲$

مثال ۳ : ب. م. م و ک. م. م عبارات زیر را به‌دست آورید:

$$A = x^۳ - ۸ \qquad B = (x^۲-۴)^۳ \qquad C = (x^۴ - ۳x^۲ - ۴)^۲$$

✎ حل:

$$A = x^۳ - ۸ = (x-۲)(x^۲+۲x+۴)$$

$$B = (x^۲-۴)^۳ = (x-۲)^۳(x+۲)^۳$$

$$C = (x^۴-۳x^۲-۴)^۲ = [(x^۲-۴)(x^۲+۱)]^۲ = (x-۲)^۲(x+۲)^۲(x^۲+۱)^۲$$

ب. م. م $= x-۲$

ک. م. م $= (x-۲)^۳(x+۲)^۳(x^۲+۱)^۲(x^۲+۲x+۴)$

☆ عبارات گویا

عبارت جبری به‌صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای و $Q(x)$ مخالف صفر باشد یک عبارت گویا نامیده می‌شود. به عنوان مثال عبارت $\frac{x-۲}{x^۲+۵x-۱}$ یک عبارت گویا می‌باشد. اما عبارت $\frac{\sqrt{x}+۵}{x-۳}$ گویا نیست.

☆ ساده کردن عبارات گویا

برای ساده کردن یک عبارت گویا ابتدا صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم. سپس عامل‌های مشترک را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم.

مثال ۴ :

الف) $\frac{4ax+8ay}{3bx+6by}=\frac{4a(x+2y)}{3b(x+2y)}=\frac{4a}{3b}$

ب) $\frac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}=\frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)^2}=\frac{x-3}{x+2}$

ج) $\frac{ax-bx-ay+by}{(b^2-a^2)(x-y)}=\frac{x(a-b)-y(a-b)}{(b-a)(b+a)(x-y)}$

$=\frac{(a-b)(x-y)}{-(a-b)(a+b)(x-y)}=\frac{-1}{a+b}$

☆ضرب و تقسیم عبارات گویا

برای به‌دست آوردن حاصل‌ضرب چند کسر ابتدا کسرها را ساده می‌کنیم. سپس صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را نیز در هم ضرب می‌کنیم. برای به‌دست آوردن خارج قسمت تقسیم کسرها، ابتدا کسر دوم را به ضرب تبدیل کرده، سپس ساده می‌کنیم و به مانند ضرب کسرها عمل می‌نماییم.

مثال ۵ :

الف) $\frac{6a^4b^2c}{7x^2y}\times\frac{14x^4y}{12a^2b^4}=\frac{a^2x^2c}{b^2}$

ب) $\frac{2b-2a}{4a+4b}\times\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{-2(a-b)}{4(a+b)}\times\frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

ج) $\frac{6x^2+x-1}{9x^2+9x-4}\times\frac{9x^2-16}{4x^2+4x+1}=\frac{(3x-1)(2x+1)}{(3x-1)(3x+4)}\times\frac{(3x-4)(3x+4)}{(2x+1)^2}$

$=\frac{3x-4}{2x+1}$

د) $\frac{4x^2-9a^2}{ab-a^2}\div\frac{2x-3a}{a^3b-a^4}=\frac{4x^2-9a^2}{ab-a^2}\times\frac{a^3b-a^4}{2x-3a}$

$=\frac{(2x-3a)(2x+3a)}{a(b-a)}\times\frac{a^3(b-a)}{2x-3a}=a^2(2x+3a)$

$$\frac{a^3-8}{a^2-a-2}\div\frac{2a^2+4a+8}{2a+2}=\frac{a^3-8}{a^2-a-2}\times\frac{2a+2}{2a^2+4a+8} \quad \text{(هـ}$$

$$=\frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{(a-2)(a+1)}\times\frac{2(a+1)}{2(a^2+2a+4)}=1$$

☆ تعیین مخرج مشترک بین چند عبارت گویا

برای تعیین مخرج مشترک بین چند کسر هریک از مخرج‌ها را تجزیه کرده و کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها را پیدا کرده به عنوان مخرج مشترک انتخاب می‌کنیم.

مثال ۶ : کسرهای $A=\frac{x^2-x}{x^2-1}$ و $B=\frac{3x+3}{x^3+2x^2+x}$ و $C=\frac{2x}{x^3}$ را هم‌مخرج کنید.

حل:

ابتدا هریک از کسرها را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{x}{x+1} \qquad B=\frac{3}{x(x+1)} \qquad C=\frac{2}{x^2}$$

اکنون مخرج مشترک می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$A=\frac{x^3}{x^2(x+1)} \qquad B=\frac{3x}{x^2(x+1)} \qquad C=\frac{2(x+1)}{x^2(x+1)}$$

☆ جمع و تفریق عبارات گویا

برای به‌دست آوردن حاصل جمع یا تفاضل کسرها ابتدا هر کسر را در صورت امکان ساده می‌کنیم. سپس کسرها را هم‌مخرج کرده و یکی از مخرج‌ها را نوشته و مجموع جبری صورت‌ها را در صورت قرار می‌دهیم.

مثال ۷ :

$$\frac{1}{x}+\frac{3x}{x+1}-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{3x^2}{x(x+1)}-\frac{1}{x(x+1)} \quad \text{(الف}$$

$$=\frac{x+1+3x^2-1}{x(x+1)}=\frac{3x^2+x}{x(x+1)}=\frac{3x+1}{x+1}$$

ب) $\dfrac{2x^3-x^2}{x^4+x^3}-\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}+\dfrac{x-1}{x^2-1}$

$=\dfrac{x^2(2x-1)}{x^3(x+1)}-\dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)}+\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{2x-1}{x(x+1)}-\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x(x+1)}-\dfrac{x^2-1}{x(x+1)}+\dfrac{x}{x(x+1)}$

$=\dfrac{2x-1-(x^2-1)+x}{x(x+1)}=\dfrac{3x-x^2}{x(x+1)}=\dfrac{x(3-x)}{x(x+1)}=\dfrac{3-x}{x+1}$

ج) $1+x+x^2+\dfrac{x^3}{1-x}=\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)+x^3}{1-x}=\dfrac{1-x^3+x^3}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$

د) $\dfrac{30a}{9a^2-1}+\dfrac{4}{3a-1}-\dfrac{5}{3a+1}=\dfrac{30a}{9a^2-1}+\dfrac{4(3a+1)}{9a^2-1}-\dfrac{5(3a-1)}{9a^2-1}$

$=\dfrac{30a+12a+4-15a+5}{9a^2-10}=\dfrac{27a+9}{9a^2-1}=\dfrac{9(3a+1)}{(3a-1)(3a+1)}=\dfrac{9}{3a-1}$

مثال ۸ : ثابت کنید:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

حل:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{-(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}=\frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$$

مثال ۹ : ثابت کنید:

$$\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\div\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)=\frac{a-b}{a+b}$$

حل:

$$\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\div\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)=\frac{(a+b)-(a-b)}{a+b}\div\frac{(a+b)-(a-b)}{a-b}$$

$$=\frac{a+b-a+b}{a+b}\div\frac{a+b-a+b}{a-b}=\frac{2b}{a+b}\div\frac{2b}{a-b}=\frac{2b}{a+b}\times\frac{a-b}{2b}=\frac{a-b}{a+b}$$

مثال ۱۰: ثابت کنید:

$$\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$$
$$=2(a+b+c)$$

حل:

$$\text{طرف اول}=\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)(b^2+c^2-a^2)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)(c^2+a^2-b^2)$$

$$+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)(a^2+b^2-c^2)=\frac{b^2}{c}+c-\frac{a^2}{c}+b+\frac{c^2}{b}-\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{a}+a-\frac{b^2}{a}+c+\frac{a^2}{c}$$

$$-\frac{b^2}{c}+\frac{a^2}{b}+b-\frac{c^2}{b}+a+\frac{b^2}{a}-\frac{c^2}{a}=2a+2b+2c=2(a+b+c)$$

☆ تجزیه‌ی یک کسر به مجموع کسرهای ساده

تبدیل یک کسر به مجموع چند کسر ساده‌تر را تجزیه‌ی کسر می‌نامند. برای تجزیه‌ی کسر ابتدا آن‌را ساده می‌کنیم و فرض می‌کنیم کسری باشد که درجه‌ی صورت آن از درجه‌ی مخرجش کوچک‌تر است. (اگر چنین نبود می‌توانیم صورت را بر مخرج تقسیم کنیم و آن‌را به‌صورت مجموع یک چندجمله‌ای و یک کسر که درجه‌ی صورتش کم‌تر از درجه‌ی مخرج باشد تبدیل کنیم.)

برای تجزیه‌ی چنین کسری مخرج آن‌را به ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. برحسب آن‌که همه‌ی عامل‌ها از درجه‌ی اول یا بعضی از درجه‌ی دوم باشند و برحسب این‌که این عامل‌ها دارای توان یک یا دارای توانی بزرگ‌تر از یک باشند، حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت اول: همه‌ی عامل‌های مخرج از درجه‌ی اول و با توان یک باشند.

در این حالت نظیر هر عامل یک کسر درنظر می‌گیریم که آن عامل مخرج کسر و عدد ثابتی مانند A و B و C و ... صورت آن باشد. مجموع این کسرها را متحد با کسر مفروض قرار می‌دهیم و پس از هم‌مخرج کردن طرفین تساوی صورت‌های دو کسر را متحد قرار می‌دهیم و از این طریق مقادیر ثابت A و B و C و ... را پیدا می‌کنیم.

مثال ۱۱: کسر $\frac{1-x}{x^2+4x+3}$ را تجزیه کنید.

حل:

$$\frac{1-x}{x^2+4x+3}=\frac{1-x}{(x+1)(x+3)}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{1-x}{(x+1)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx+B}{(x+1)(x+3)}\Rightarrow -x+1=(A+B)x+3A+B$$

$$\begin{cases}A+B=-1\\ 3A+B=1\end{cases}\Rightarrow A=1 \text{ و } B=-2$$

بنابراین:

$$\frac{1-x}{x^2+4x+3}=\frac{1}{x+1}+\frac{-2}{x+3}$$

مثال ۱۲: کسر زیر را به‌صورت مجموع چند کسر ساده بنویسید.

$$\frac{9x^2-16x+4}{x^3-3x^2+2x}$$

حل:

$$\frac{9x^2-16x+4}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}$$

$$\frac{9x^2-16x+4}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$9x^2-16x+4\equiv Ax^2-3Ax+2A+Bx^2-2Bx+Cx^2-Cx$$

$$9x^2-16x+4\equiv(A+B+C)x^2-(3A+2B+C)x+2A$$

$$\begin{cases} A+B+C=۹ \\ ۳A+۲B+C=۱۶ \\ ۲A=۴\to A=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲+B+C=۹ \\ ۲+۲B+C=۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=۷ \\ ۲B+C=۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B=۳ \\ C=۴ \end{matrix}$$

بنابراین:

$$\frac{۹x^۲-۱۶x+۴}{x^۳-۳x^۲+۲x}=\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x-۱}+\frac{۴}{x-۲}$$

نکته: برای محاسبه‌ی A، B و C می‌توان به این ترتیب عمل کرد که دو مقدار دلخواه به‌جای x قرار داده و دستگاه حاصل را حل کرد. اگر مخرج‌ها درجه‌ی اول باشند، می‌توان از ریشه‌های آن‌ها نیز استفاده کرد. به عنوان مثال در عبارت فوق اگر به‌جای x عدد یک را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$۹\times۱-۱۶\times۱+۴=A\times۰+B\times۱\times(۱-۲)+C\times۰$$

$$-۳=-B\to B=۳$$

به همین ترتیب اگر جای x صفر قرار دهیم A و اگر به‌جای x عدد دو را قرار دهیم C به‌دست می‌آید.

حالت دوم: همه‌ی عامل‌های مخرج درجه‌ی اول، اما بعضی یا همه‌ی آن‌ها به توان بزرگ‌تر از یک می‌باشند.

در این حالت نظیر هر عامل مانند $(ax+b)^n$ تعداد n کسر به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$\frac{A_۱}{ax+b} \text{ و } \frac{A_۲}{(ax+b)^۲} \text{ و } \dots \text{ و } \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

سپس مانند حالت اول عمل می‌کنیم.

مثال ۱۳ : کسر $\frac{۳x^۲+۳x+۳}{x^۳-۳x+۲}$ را تجزیه کنید.

حل:

$$x^۳-۳x+۲=x^۳-x-۲x+۲=x(x^۲-۱)-۲(x-۱)=(x-۱)(x^۲+x-۲)$$

$$=(x-۱)(x-۱)(x+۲)=(x-۱)^۲(x+۲)$$

$$\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$3x^2+3x+3\equiv Ax^2+Ax-2A+Bx+2B+Cx^2-2Cx+C$$

$$3x^2+3x+3\equiv(A+C)x^2+(A+B-2C)x-2A+2B+C$$

$$\begin{cases}A+C=3\\A+B-2C=3\\-2A+2B+C=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+3-2C=3\\-2A+6+C=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A-2C=0\\-2A+C=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}A=2\\C=1\end{matrix}$$

$$3B=9\rightarrow B=3$$

بنابراین:

$$\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+2}$$

حالت سوم: بعضی از عامل‌های مخرج از درجه‌ی دو باشند و در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تجزیه‌ناپذیر.

در این حالت نیز مانند حالت‌های اول و دوم عمل می‌کنیم. با این تفاوت که صورت هر کسر که مخرج آن عامل درجه‌ی دوم، یا توانی از این عامل باشد را دو جمله‌ای درجه‌ی اول درنظر می‌گیریم که ضریب‌های آن باید از متحد قرار دادن دو طرف معین شوند.

مثال ۱۴ :کسر زیر را به‌صورت مجموع چند کسر ساده تبدیل کنید.

$$\frac{x^3-x^2-x-3}{x^4-1}$$

حل:

$$\frac{x^3-x^2-x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{x^3-x^2-x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$x^3-x^2-x-3=Ax^3+Ax+Ax^2+A+Bx^3+Bx-Bx^2-B+Cx^3-Cx+Dx^2-D$$

$$x^3-x^2-x-3=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+A-B-D$$

$$\begin{cases}A+B+C=1\\ A-B+D=-1\\ A+B-C=-1\\ A-B-D=-3\end{cases}$$

معادله‌ی اول را منهای معادله‌ی سوم می‌کنیم. $\rightarrow 2C=2\rightarrow C=1$

معادله‌ی دوم را منهای معادله‌ی چهارم می‌کنیم. $\rightarrow 2D=2\rightarrow D=1$

$$\begin{cases}A+B+1=1\\ A-B+1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\ A-B=-2\end{cases}\Rightarrow A=-1 \text{ و } B=1$$

بنابراین:

$$\frac{x^3-x^2-x-3}{x^4-1}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+1}$$

مثال ۱۵: کسر $\frac{2x^3+3x^2-2}{x^2+x-2}$ را تجزیه کنید.

حل:

با توجه به این‌که درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بزرگ‌تر است صورت را بر مخرج تقسیم کرده و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+3x^2-2 & x^2+x-2 \\ \underline{2x^3+2x^2-4x} & 2x+1 \\ \quad x^2+4x-2 & \\ \quad \underline{x^2+x-2} & \\ \quad 3x & \end{array}$$

$$\frac{2x^3+3x^2-2}{x^2+x-2}=2x+1+\frac{3x}{x^2+x-2}$$

$$\frac{3x}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\Rightarrow\frac{3x}{(x-1)(x+2)}=\frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)}$$

$$3x\equiv(A+B)x+2A-B$$

$$\begin{cases}A+B=3\\2A-B=0\end{cases}\Rightarrow A=1 \text{ و } B=2$$

بنابراین:

$$\frac{2x^3+3x^2-2}{x^2+x-2}=2x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}$$

☆ تقسیم چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای

برای تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای می‌توانیم هریک از جمله‌های چندجمله‌ای را بر یک‌جمله‌ای تقسیم کنیم.

مثال ۱۶ : تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\dfrac{3a^4b^4-4a^5b^3+2a^2b^4}{2a^2b^3}$ ب) $\dfrac{6x^4-3x^2-9x}{3x^2}$

حل:

الف) $\dfrac{3a^4b^4-4a^5b^3+2a^2b^4}{2a^2b^3}=\dfrac{3a^4b^4}{2a^2b^3}-\dfrac{4a^5b^3}{2a^2b^3}+\dfrac{2a^2b^3}{2a^2b^3}=\dfrac{3}{2}a^2b-2a^3+b$

ب) $\dfrac{6x^4-3x^2-9x}{3x^2}=\dfrac{6x^4}{3x^2}-\dfrac{3x^2}{3x^2}-\dfrac{9x}{3x^2}=2x^2-1-\dfrac{3}{x}$

نکته: چندجمله‌ای A بر یک‌جمله‌ای B بخش‌پذیر است، در صورتی‌که هریک از جمله‌های چندجمله‌ای A بر یک‌جمله‌ای B بخش‌پذیر باشد. به عبارت دیگر حاصل تقسیم خود یک چندجمله‌ای باشد.

در مثال (۱۶) قسمت «الف» چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای بخش‌پذیر است ولی در قسمت «ب» چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای بخش‌پذیر نیست.

☆ تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x) \neq 0$ را در نظر بگیرید. در صورتی‌که درجه‌ی $f(x)$ بزرگ‌تر یا مساوی درجه‌ی $g(x)$ باشد دو چندجمله‌ای $q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند، به طوری‌که:

$$f(x) = g(x).q(x) + R(x)$$

که در آن $q(x)$ خارج قسمت و $R(x)$ باقی‌مانده می‌باشد.

درجه‌ی باقی‌مانده از درجه‌ی مقسوم‌علیه کم‌تر است. اگر $R(x) = 0$ باشد، آن‌گاه گوییم $f(x)$ بر $g(x)$ بخش‌پذیر است.

برای تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $g(x)$ ابتدا هر دو چندجمله‌ای را بر حسب قوای نزولی x مرتب می‌کنیم، سپس اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه تقسیم کرده و خارج قسمت را مشخص می‌کنیم. آن‌گاه خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و از مقسوم کم می‌کنیم. این باقی‌مانده را بر مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم. بدین ترتیب که اولین جمله‌ی باقی‌مانده (مقسوم جدید) را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و در خارج قسمت می‌نویسیم. سپس آن‌را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و حاصل ضرب را از مقسوم کم می‌کنیم و اعمال فوق را آنقدر ادامه می‌دهیم تا درجه‌ی باقی‌مانده از درجه‌ی مقسوم‌علیه کم‌تر شود.

مثال ۱۷ : چندجمله‌ای $6x^3 - 17x^2 + 14x - 3$ را بر دو جمله‌ای $2x - 3$ تقسیم کنید.

$$\begin{array}{l|l}
6x^3 - 17x^2 + 14x - 3 & 2x - 3 \\ \hline
-6x^3 \mp 9x^2 & 3x^2 - 4x + 1 \\ \hline
-8x^2 + 14x - 3 & \\
\mp 8x^2 \pm 12x & \\ \hline
2x - 3 & \\
-2x \mp 3 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

ملاحظه می‌شود باقی‌مانده صفر است. لذا چندجمله‌ای $6x^3 - 17x^2 + 14x - 3$ بر $2x - 3$ بخش‌پذیر است.

مثال ۱۸ : چندجمله‌ای $۶x^۴ + ۱۰x - ۷x^۳ - ۲۳$ را بر $۳x^۲ + ۵ - ۲x$ تقسیم کنید.

حل:

مقسوم و مقسوم‌علیه را برحسب توان‌های نزولی x مرتب می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} ۶x^۴ - ۷x^۳ + ۰x^۲ + ۱۰x - ۲۳ & ۳x^۲ - ۲x + ۵ \\ \hline \underline{-۶x^۴ \mp ۴x^۳ \pm ۱۰x^۲} & ۲x^۲ - x - ۴ \\ -۳x^۳ - ۱۰x^۲ + ۱۰x - ۲۳ & \\ \underline{\mp ۳x^۳ \pm ۲x^۲ \mp ۵x} & \\ -۱۲x^۲ + ۱۵x - ۲۳ & \\ \underline{\mp ۱۲x^۲ \pm ۸x \mp ۲۰} & \\ ۷x - ۳ & \end{array}$$

$$۶x^۴ - ۷x^۳ + ۱۰x - ۲۳ = (۳x^۲ - ۲x + ۵)(۲x^۲ - x - ۴) + (۷x - ۳)$$

مثال ۱۹ : عبارت $x^۶ + ۵$ را بر $x^۲ - ۱$ تقسیم کنید.

حل:

$$\begin{array}{l|l} x^۶ + ۵ & x^۲ - ۱ \\ \hline \underline{-x^۶ \mp x^۴} & x^۴ + x^۲ + ۱ \\ x^۴ + ۵ & \\ \underline{-x^۴ \mp x^۲} & \\ x^۲ + ۵ & \\ \underline{-x^۲ \mp ۱} & \\ ۶ & \end{array}$$

مثال ۲۰ : تقسیم زیر را انجام دهید:

$$(x^۵ + ۵x^۴y + ۱۰x^۳y^۲ + ۱۰x^۲y^۳ + ۵xy^۴ + y^۵) \div (x^۲ + ۲xy + y^۲)$$

حل:

اگر مقسوم و مقسوم‌علیه از چند متغیر تشکیل شده باشند، آن‌ها را برحسب توان‌های نزولی

یکی از متغیرها مرتب کرده، سپس تقسیم را انجام می‌دهیم.

$$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 \quad \Big| \quad x^2+2xy+y^2$$

$$-x^5 \pm 2x^4y \pm x^3y^2 \qquad\qquad x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$3x^4y+9x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

$$-3x^4y \pm 6x^3y^2 \pm 3x^2y^3$$

$$3x^3y^2+7x^2y^3+5xy^4+y^5$$

$$-3x^3y^2 \pm 6x^2y^3 \pm 3xy^4$$

$$x^2y^3+2xy^4+y^5$$

$$-x^2y^3 \pm 2xy^4 \pm y^5$$

$$0$$

مثال ۲۱ : نشان دهید عبارت x^4-y^4 بر $x+y$ بخش‌پذیر است.

حل:

$$x^4+0x^3+0x^2+0x-y^4 \quad \Big| \quad x+y$$

$$-x^4 \pm x^3y \qquad\qquad x^3-x^2y+xy^2-y^3$$

$$-x^3y+0x^2+0x-y^4$$

$$\mp x^3y \mp x^2y^2$$

$$x^2y^2+0x-y^4$$

$$-x^2y^2 \pm xy^3$$

$$-xy^3-y^4$$

$$\mp xy^3 \mp y^4$$

$$0$$

ملاحظه می‌شود x^4-y^4 بر $x+y$ بخش‌پذیر است. به همین ترتیب با تقسیم می‌توان نتیجه گرفت x^4-y^4 بر $x-y$ نیز بخش‌پذیر است.

مثال ۲۲ : مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که عبارت x^4+mx+n بر

عبارت $x^{2}-2x-3$ بخش‌پذیر باشد.

حل:

یک روش برای حل این مسئله آن است که چندجمله‌ای $x^{4}+mx+n$ را بر $x^{2}-2x-3$ تقسیم کرده و باقی‌مانده را متحد با صفر قرار دهیم. روش‌های دیگر متعاقباً بیان می‌شوند.

$$
\begin{array}{l|l}
x^{4}+0x^{3}+0x^{2}+mx+n & x^{2}-2x-3 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^{4}\mp 2x^{3}\mp 3x^{2}} & x^{2}+2x+7 \\
2x^{3}+3x^{2}+mx+n & \\
\underline{-2x^{3}\mp 4x^{2}\mp 6x} & \\
7x^{2}+(m+6)x+n & \\
\underline{-7x^{2}\mp 14x\mp 21} & \\
(m+20)x+n+21 &
\end{array}
$$

$$(m+20)x+n+21\equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} m+20=0 \to m=-20 \\ n+21=0 \to n=-21 \end{cases}$$

مثال ۲۳ : چندجمله‌ای $a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc$ را بر $a+b+c$ تقسیم کنید.

حل:

$$
\begin{array}{l|l}
a^{3}+0a^{2}+3bca+b^{3}+c^{3} & a+b+c \\
\cline{2-2}
\underline{-a^{3}\pm a^{2}(b+c)} & a^{2}-a(b+c)+b^{2}+c^{2}-bc \\
-a^{2}(b+c)-3bca+b^{3}+c^{3} & \\
\underline{\mp a^{2}(b+c)\mp a(b+c)^{2}} & \\
a(b^{2}+c^{2}-bc)+b^{3}+c^{3} & \\
\underline{-a(b^{2}+c^{2}-bc)\pm b^{3}\pm c^{3}} & \\
0 &
\end{array}
$$

خارج قسمت برابر $a^{2}+b^{2}+c^{2}-ab-ac-bc$ و باقی‌مانده صفر شد. لذا:

$$a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc=(a+b+c)(a^{2}+b^{2}+c^{2}-ab-ac-bc)$$

✩ طریقه‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک دوجمله‌ای درجه‌ی اول

چندجمله‌ای $p(x)=x^{۳}-۲x^{۲}+۳x-۵$ را بر $x-۲$ تقسیم کرده و باقی‌مانده را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{l|l} x^{۳}-۲x^{۲}+۳x-۵ & x-۲ \\ \cline{2-2} -x^{۳}\mp ۲x^{۲} & x^{۲}+۳ \\ \cline{1-1} ۳x-۵ & \\ -۳x\mp ۶ & \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array}$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-۲$ برابر ۱ شد. حال مقدار عددی چندجمله‌ای $p(x)$ را به ازای $x=۲$ (ریشه‌ی دوجمله‌ای $x-۲$) به‌دست آورید. این مقدار چه ارتباطی با باقی‌مانده‌ی تقسیم فوق دارد؟

$$p(۲)=۲^{۳}-۲\times ۲^{۲}+۳\times ۲-۵=۸-۸+۶-۵=۱$$

حدسی که زده‌اید درست است. یعنی باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-۲$ برابر با مقدار عددی $p(x)$ به ازای $x=۲$است.

قضیه: چندجمله‌ای $p(x)=a_n x^{n}+a_{n-۱}x^{n-۱}+\ldots+a_۱ x+a_۰$ و دوجمله‌ای $x-a$ را درنظر گرفته و خارج قسمت تقسیم $p(x)$ بر $x-a$ را $Q(x)$ و باقی‌مانده‌ی این تقسیم را R می‌نامیم. بنابر تعریف تقسیم همواره داریم:

$$p(x)\equiv(x-a)Q(a)+R$$

این تساوی به ازای همه‌ی مقادیر x از جمله به ازای $x=a$ برقرار است. بنابراین:

$$p(a)=(a-a)Q(a)+R \Rightarrow p(a)=R$$

بنابراین: **باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-a$ برابر $p(a)$ است.**

نکته: برای تعیین باقی‌مانده‌ی چندجمله‌ای $p(x)$ بر $ax+b$ کافی است مقدار

عددی $p(x)$ را به ازای $x=\frac{-b}{a}$ (ریشه‌ی دوجمله‌ای $ax+b$) به‌دست آوریم.

مثال ۲۴ : باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ی $p(x)=x^۳+۳x^۲-۲x+۱$ بر $x+۲$ چیست؟

حل:

$x+۲=۰\rightarrow x=-۲$

$p(-۲)=(-۲)^۳+۳\times(-۲)^۲-۲\times(-۲)+۱=-۸+۱۲+۴+۱=۹$

مثال ۲۵ : باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x)=۵x^۳+۳x^۲-x-۷$ بر $x-۱$ چیست؟

حل:

$x-۱=۰\rightarrow x=۱$

$p(۱)=۵\times۱^۳+۳\times۱^۲-۱-۷=۵+۳-۱-۷=۰$

می‌توان گفت $p(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است.

مثال ۲۶ :باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=۴x^۲-۲x+۷$ بر $۲x+۳$ چیست؟

حل:

$۲x+۳=۰\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$

$P\left(-\frac{۳}{۲}\right)=۴\times\left(-\frac{۳}{۲}\right)^۲-۲\left(-\frac{۳}{۲}\right)+۷=۹+۳+۷=۱۹$

مثال ۲۷ : باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $(m-۱)x^۳-(m+۲)x^۲-۵x+۷$ بر عبارت $x-۲$ برابر ۵ است. مقدار m چقدر است؟

حل:

$x-۲=۰\rightarrow x=۲$

$(m-۱)\times۲^۳-(m+۲)\times۲^۲-۵\times۲+۷=۵$

$۸m-۸-۴m-۸-۱۰+۷=۵$

$۴m-۱۹=۵\rightarrow ۴m=۲۴\rightarrow m=۶$

مثال ۲۸ : در عبارت $p(x) = ۲x^۴ + mx^۲ + n$ مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که باقی‌مانده‌ی تقسیم این عبارت بر $x + ۱$ برابر ۳- و بر $x - ۲$ برابر ۳ باشد.

حل:

باید داشته باشیم $p(-۱) = -۳$ و $p(۲) = ۳$.

$$\begin{cases} P(-۱) = ۲ + m + n = -۳ \\ P(۲) = ۳۲ + ۴m + n = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = -۵ \\ ۴m + n = -۲۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -۸ \\ n = ۳ \end{cases}$$

مثال ۲۹ : باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x) = x^n - a^n$ را بر $x - a$ و $x + a$ به‌دست آورید.

حل:

$$x - a = ۰ \rightarrow x = a \Rightarrow p(a) = a^n - a^n = ۰$$

$$x + a = ۰ \rightarrow x = -a \Rightarrow p(-a) = (-a)^n - a^n = \begin{cases} ۰ & n \text{ زوج} \\ -۲a^n & n \text{ فرد} \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود چندجمله‌ای $x^n - a^n$ همواره بر $x - a$ بخش‌پذیر است. هم‌چنین اگر n عددی زوج باشد، $x^n - a^n$ بر $x + a$ نیز بخش‌پذیر است.

مثال ۳۰ : باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x) = x^n + a^n$ بر $x + a$ را به‌دست آورید.

حل:

$$x + a = ۰ \rightarrow x = -a$$

$$p(-a) = (-a)^n + a^n = \begin{cases} ۰ & n \text{ فرد} \\ ۲a^n & n \text{ زوج} \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود $a^n + b^n$ در صورتی بر $x + a$ بخش‌پذیر است که n عددی فرد باشد.

مثال ۳۱ : عدد $۲۱^{۱۰} - ۷^{۱۰}$ بر $۱۴ = ۷ - ۲۱$ و $۲۸ = ۷ + ۲۱$ بخش‌پذیر است.

مثال ۳۲ : عدد $۱۳^{۱۹} + ۷^{۱۹}$ بر $۲۰ = ۷ + ۱۳$ بخش‌پذیر است.

مثال ۳۳ : نشان دهید عبارت $A = (x + y + z)^۳ - x^۳ - y^۳ - z^۳$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است.

حل:

کافی است نشان دهیم مقدار عبارت A به ازای $x=-y$ صفر است.

$$x=-y \to A=(-y+y+z)^{۳}-(-y)^{۳}-y^{۳}-z^{۳}$$
$$=z^{۳}+y^{۳}-y^{۳}-z^{۳}=۰$$

مثال ۳۴ : باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=۳x^{۶}+۲x^{۴}-x^{۲}+۱$ را بر $x^{۲}+۱$ به‌دست آورید.

حل:

$$x^{۲}+۱=۰ \to x^{۲}=-۱$$
$$p(x)=۳(x^{۲})^{۳}+۲(x^{۲})^{۲}-x^{۲}+۱=۳(-۱)^{۳}+۲(-۱)^{۲}-(-۱)+۱$$
$$=-۳+۲+۱+۱=۱$$

☆ باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $(x-\alpha)(a-\beta)$

باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $(x-\alpha)(x-\beta)$ از درجه‌ی یک یا صفر است و آن‌را به‌صورت $ax+b$ نشان می‌دهیم. لذا:

$$p(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+ax+b$$

x را یک‌بار برابر α و یک‌بار برابر β قرار می‌دهیم که نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} p(\alpha)=a\alpha+b \\ p(\beta)=a\beta+b \end{cases}$$

این دستگاه را نسبت به a و b حل می‌کنیم تا a و b و در نهایت باقی‌مانده یعنی $ax+b$ مشخص شود. این روش را می‌توان برای تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر حاصل ضرب سه عامل و بیش‌تر نیز به‌کار برد.

مثال ۳۵ : باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^{۴}-۲x^{۳}+x-۳$ را بر عبارت $(x+۱)(x-۳)$ به‌دست آورید.

حل:

$$(x+۱)(x-۳)=۰ \to x=-۱ \text{ یا } x=۳$$

$$p(-1)=(-1)^4-2\times(-1)^3+(-1)-3=1+2-1-3=-1$$

$$p(3)=3^4-2\times3^3+3-3=81-54+3-3=27$$

با توجه به این‌که باقی‌مانده حداکثر از درجه‌ی یک است، آن‌را $R=ax+b$ درنظر می‌گیریم.

$$p(x)=x^4-2x^3+x-3=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$$

$$\begin{cases}p(-1)=a(-1)+b\\p(3)=a\times3+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1=-a+b\\27=3a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=7\\b=6\end{cases}\Rightarrow R=7x+6$$

مثال ۳۶ : a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای:

$p(x)=2ax^4+(b-2a)x^3-bx^2-4bx-4$ بر $(x-2)(x+1)$

بخش‌پذیر باشد.

حل:

چندجمله‌ای $p(x)$ باید بر $x+1$ و $x-2$ بخش‌پذیر باشد.

$$x+1=0\rightarrow x=-1 \qquad\qquad x-2=0\rightarrow x=2$$

$$\begin{cases}p(-1)=0\\p(2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a\times(-1)^4+(b-2a)(-1)^3-b(-1)^2-4b(-1)-4=0\\2a\times2^4+(b-2a)\times2^3-b\times2^2-4b\times2-4=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a-b+2a-b+4b-4=0\\32a+8b-16a-4b-8b-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+2b=4\\16a-4b=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+b=2\\4a-b=1\end{cases}\Rightarrow 6a=3\rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}\rightarrow b=4a-1=4\times\frac{1}{2}-1=1\Rightarrow\boxed{b=1}$$

مثال ۳۷ : ثابت کنید $17^{2^n}-1$ بر ۲۹ بخش‌پذیر است. ($n>1$ و $n\in N$)

حل:

$$17^{2^n}-1=(17^2)^{2^{n-1}}-1=289^{2^{n-1}}-1^{2^{n-1}}$$

با توجه به این‌که 2^{n-1} زوج است، عدد فوق بر $290=1+289$ بخش‌پذیر است. بنابراین بر ۲۹ نیز بخش‌پذیر است.

☆ پیدا کردن خارج قسمت یک تقسیم به روش ضریب‌های نامعین

می‌خواهیم خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $3x^3+5x^2+3x+1$ را بر $x+1$ به‌دست آوریم. با توجه به این‌که مقسوم از درجه‌ی ۳ و مقسوم‌علیه از درجه‌ی ۱ می‌باشد می‌توان گفت خارج قسمت چندجمله‌ای از درجه‌ی دوم است که آن‌را ax^2+bx+c درنظر می‌گیریم. با توجه به این‌که $p(-1)=0$ است، $p(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$3x^3+5x^2+3x-1=(x+1)(ax^2+bx+c)$$
$$3x^3+5x^2+3x+1=ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c$$
$$3x^3+5x^2+3x+1=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$$

$$\begin{cases}a=3\\ a+b=5\\ b+c=3\\ c=1\end{cases}\rightarrow 3+b=5\rightarrow b=2$$

بنابراین خارج قسمت تقسیم فوق عبارت است از: $3x^2+2x+1$

مثال ۳۸: خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=8x^3+22x^2+22x+17$ را بر عبارت $2x+4$ به‌دست آورید.

✎ **حل:**

$$2x+4=0\rightarrow 2x=-4\rightarrow x=-2$$
$$p(-2)=8\times(-8)+22\times 4+22\times(-2)+17$$
$$=-64+88-44+17=-3 \quad \text{باقی‌مانده}$$

$$8x^3+22x^2+22x+17=(2x+4)(ax^2+bx+c)-3$$
$$8x^3+22x^2+22x+17=2ax^3+2bx^2+2cx+4ax^2+4bx+4c-3$$
$$8x^3+22x^2+22x+17=2ax^3+(2b+4a)x^2+(2c+4b)x+4c-3$$

$$\begin{cases}2a=8\rightarrow a=4\\ 2b+4a=22\\ 2c+4b=22\\ 4c-3=17\rightarrow c=5\end{cases}\Rightarrow 2b+16=22\rightarrow 2b=6\rightarrow b=3$$

بنابراین خارج قسمت تقسیم عبارتست از: $4x^2+3x+5$

تمرین‌های فصل هفتم

۱. بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارات زیر را به‌دست آورید.:

$A = ۱۲۰(x-۳)^۲(x-۱)^۳$

$B = ۱۸۰(x-۳)(x-۱)^۲$

$C = ۱۴۴(x-۳)^۳(x+۱)$

۲. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک هر دسته از عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $۹x^۲-۸۱$ و $x^۲-۶x+۹$ و $۵x^۲-۱۵x$

ب) $۴a^۲-۹$ و $۴a^۲-۱۲a+۹$ و $۱۰a-۱۵$

ج) $a^۴-۸۱$ و $a^۴+۱۸a^۲+۸۱$

د) $۴۰y^۳-۵$ و $۴y^۲-۴y+۱$ و $۴۰y^۳-۶۰y^۲+۳۰y-۵$

هـ) $x^۳+۸x^۲+۱۵x$ و $x^۴+۳x^۳-۱۰x^۲$

و) $x^۲-۲xy-۱۵y^۲$ و $x^۲+۷xy+۱۲y^۲$

ز) $۲۴a-۲۴b$ و $(۶a-۶b)^۲$ و $(۴a-۴b)^۳$ و $(۹a^۲-۹b^۲)^۲$

ح) $a^۳+۲۷b^۳$ و $۵a^۲-۴۵b^۲$ و $a^۲+۵ab+۶b^۲$

ط) $۱۲c^۳-۲۳c^۲d-۲۴cd^۲$ و $۱۵c^۴-۳۴c^۳d-۱۶c^۲d^۲$

۳. کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{14b^4x \times 5ay \times 6a}{15a^2x \times 7b^3y}$

ب) $\frac{34a^2b^5c^5 \times 6a^7b^2d^3}{ac^3d^3 \times 51a^4b^2c^2}$

ج) $\frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab}$

د) $\frac{4a^2+12a+9}{4a^2-9}$

هـ) $\frac{12ax^2+3ax}{8x^2+22x+5}$

و) $\frac{16x^3-128}{8x^2-24x+16}$

ز) $\frac{a^6-b^6}{(a+b)(a^3-b^3)}$

ح) $\frac{c^2-a^2-b^2-2ab}{a+b+c}$

ط) $\frac{x^4-9x^2}{x^4-x^3-6x^2}$

ی) $\frac{xy+5x+7y+35}{y+5}$

ک) $\frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab}$

ل) $\frac{(a^2+b^2-c^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{4ab^2-4abc}$

م) $\frac{(a^8+2a^4x^2+x^4)(a^4-x^2)}{(a^2+x)(a^6-a^4x+a^2x^2-x^3)}$

ن) $\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{(xy+1)^2-(x+y)^2}$

س) $\frac{2x^2-11x+5}{6x^2+5x-4}$

ع) $\frac{6x^3+3x^2-3x}{2x^2+x-1}$

۴. حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{1}{a^2bc}+\frac{1}{ab^2c}+\frac{1}{abc^2}$

ب) $\frac{3a}{a^2-16}-\frac{2}{a-4}$

ج) $\frac{a}{3+a}+\frac{a}{3-a}+\frac{2a^2}{9-a^2}$

د) $\frac{3x}{x+2}+\frac{12x}{x^2-4}-\frac{3x^2-12}{x^2-4}$

هـ) $\frac{a+5}{a-1}-\frac{6}{a^2+a+1}-\frac{6(a^2+2)}{a^3-1}$

و) $1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x}$

ز) $1-2x+x^2+\frac{1-x^4}{1+2x+x^2}$

ح) $\frac{x-2y}{xy}+\frac{3y-a}{ay}-\frac{3x-2a}{ax}$

ط) $\frac{x}{x^2+5x+6}+\frac{15}{x^2+9x+14}-\frac{12}{x^2+10x+21}$

ی) $\frac{x^2-4}{x^2-x-2}\times\frac{x^2-3x-4}{x^2-2x-8}$

ک) $\frac{a^2+ac}{a^2c-c^3}-\frac{a^2-c^2}{a^2c+2ac^2+c^3}+\frac{2c}{c^2-a^2}-\frac{3}{a+c}$

ل) $\frac{a^2b^2+3ab}{4a^2-1}\times\frac{2a+1}{ab+3}$

م) $\frac{x}{x^2-y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x^3+y^3}{y^4-x^4}+\frac{xy}{(x+y)(x^2+y^2)}$

ن) $\frac{4x^2-9a^4}{ab-a^2}\div\frac{2x-3a^2}{a^3b-a^4}$

س) $\frac{x^3+y^3}{x^4-y^4}\times\frac{x^2y+y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}\times\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$

ع) $\left(a^2-x+\frac{2x^2}{a^2+x}\right)\left(a^2+x\right)$

ف) $\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)$

ص) $\frac{x^2-x-2}{a^2-b^2}\div\frac{x-2}{a^2+ab}$

۵. ثابت کنید:

$$\frac{bc}{(a-c)(a-b)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$$

۶. ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}=0$$

۷. اگر $a+b+c=0$ ثابت کنید:

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$$

۸. ثابت کنید:

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\frac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2}=1$$

۹. ثابت کنید:

$$\frac{3a-6b}{a+b}-\frac{5a-6b}{a-b}-\frac{4a-5b}{a+b}+\frac{7a-8b}{a-b}=1$$

۱۰. نشان دهید:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)=3$$

۱۱. نشان دهید:

$$\left(\frac{a+b}{2a-2b}-\frac{a-b}{2a+2b}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right)\times\frac{(a-b)^2}{2b}=a-b$$

۱۲. درستی تساوی‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2x+2}-\frac{4x}{x^2-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x-1}{x+1}$

ب) $\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}+\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}=\frac{2a}{a-b}$

۱۳. کسر مرکب زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}$$

۱۴. ثابت کنید:

$$\frac{x^{2}y^{2}}{a^{2}b^{2}}+\frac{(x^{2}-a^{2})(y^{2}-a^{2})}{a^{2}(a^{2}-b^{2})}+\frac{(x^{2}-b^{2})(y^{2}-b^{2})}{b^{2}(b^{2}-a^{2})}=1$$

۱۵. ثابت کنید:

$$\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}=1$$

۱۶. ثابت کنید:

$$\frac{1+a}{(a-b)(a-c)}+\frac{1+b}{(b-c)(b-a)}+\frac{1+c}{(c-a)(c-b)}=0$$

۱۷. اگر $xyz=1$، ثابت کنید:

$$\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{z}{zx+z+1}=1$$

۱۸. اگر $a=x^{2}-yz$ و $b=y^{2}-zx$ و $c=z^{2}-xy$، ثابت کنید:

$$(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$$

۱۹. اگر $x=\frac{b^{2}+c^{2}+a^{2}}{2bc}$ و $y=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$، حاصل عبارت $(1+x)(1+y)$ را به‌دست آورید.

۲۰. ثابت کنید:

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=\frac{1}{abc}$$

۲۱. عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{(x^{2}-y^{2})^{3}+(y^{2}-z^{2})^{3}+(z^{2}-x^{2})^{3}}{(x-y)^{3}+(y-z)^{3}+(z-x)^{3}}$$

۲۲. ثابت کنید:

$$\frac{x^{4}-(x-1)^{2}}{(x^{2}+1)^{2}-x^{2}}+\frac{x^{4}-(x-1)^{2}}{x^{2}(x+1)^{2}-1}+\frac{x^{2}(x-1)^{2}-1}{x^{2}-(x^{2}+1)^{2}}=1$$

۲۳. اگر $a = b - 1$ و $c = a + 2$، ثابت کنید:

$$\frac{a^2b^2c^2 - a^2b^2 - c^2 + 1}{a^2bc - \frac{c}{b} + b\left(a^2 - \frac{1}{b^2}\right)} + 1 = a^2$$

۲۴. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$\frac{1}{a(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+4)} + \dots + \frac{1}{(a+98)(a+100)}$$

۲۵. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{b^2-a^2}\right)\frac{a}{a-b} + \left(\frac{b}{b-a} + \frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$$

۲۶.حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$\left[\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right)^{-1}\right]\left[\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{x-y}\right)\right]^{-1}$$

۲۷. مقادیر A و B و C را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

الف) $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$

ب) $\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2}$

ج) $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}$

۲۸. کسرهای زیر را به‌صورت مجموع چند کسر ساده تبدیل کنید.

الف) $\frac{1}{x^2 - x}$

ب) $\frac{2x}{(x+1)^2}$

ج) $\frac{x^3}{x^4 - 1}$

د) $\frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2(x+1)}$

هـ) $\frac{7x^2-6x+1}{(x-3)(x^2-3x+2)}$

و) $\frac{x^3-7x^2-3x-7}{x^4-1}$

ز) $\frac{x^4+x^3-x^2-19x+16}{x^2+x-6}$

۲۹. تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $(x^4+5x^3-4x^2+3x-6)\div(x-2)$

ب) $(6x^4-7x^3+10x-23)\div(3x^2-2x+5)$

ج) $(x^5-x^2+2-x^4-x^3-x)\div(x+1+x^2)$

د) $(x^5+x^4-x^2+1)\div(x^2+x+2)$

هـ) $(x^{10}+x^5+1)\div(x^2+x+1)$

و) $(2x^{10}+7x^8+x^6+2x^4-3x^2-1)\div(x^4-3x^2-1)$

ز) $(x^5+1)\div(x+1)$

ح) $(2x^5-4x^4-x^3-5x-2)\div(2x^3+x+2)$

ط) $(a^4-b^4)\div(a-b)$

۳۰. بدون انجام عمل تقسیم باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $5x^5-4x^3-3x+2$ بر $x+2$ را به‌دست آورید.

۳۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم زیر را بدون انجام عمل تقسیم به‌دست آورید.

$(9x^3+12x^2+6x-7)\div(3x+1)$

۳۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $5x^6-2x^3+1$ بر x^3+1 چیست؟

۳۳. باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $2x^3+x^2-3x+1$ بر $2x-1$ را بدون انجام تقسیم به‌دست آورید.

۳۴. نشان دهید چندجمله‌ای $x(x^2+xz+z^2)-y(y^2+yz+z^2)$ بر $x-y$ بخش‌پذیر است.

۳۵. مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارت $(m-۲)x^{۳}+(۲m-۵)x^{۲}-۳x-m$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد.

۳۶. مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای زیر بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش‌پذیر باشد.

$$(۲m-n)x^{۳}+(m-۳)x^{۲}-(n-۱)x-۱۰$$

۳۷. مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارت $(m-۱)x^{۴}+۲mx^{۲}-۲$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد.

۳۸. a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x)=x^{۵}+bx^{۳}+ax^{۲}+۳$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x+۱$ برابر -۴ باشد.

۳۹. نشان دهید $x^{۵}+y^{۱۵}$ بر $x+y^{۳}$ بخش‌پذیر است.

۴۰. باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^{۴۵}-۳x^{۳۰}+۲x^{۱۵}-x^{۵}+۱$ بر $x^{۵}+۱$ را حساب کنید.

۴۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $x^{۵}-۳x^{۴}+۲x^{۳}+۵x^{۲}-۷x-۶$ بر $x^{۲}+۱$ را به‌دست آورید.

۴۲. مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارت $x^{۴}-۳x^{۳}+۷m$ بر $x+۴$ بخش‌پذیر باشد.

۴۳. ثابت کنید عدد $۲^{۲۰}-۳^{۸}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

۴۴. ثابت کنید عدد $۲^{۳۵}+۳^{۱۴}$ بر ۴۱ بخش‌پذیر است.

۴۵. ثابت کنید عبارت $۳^{۴x}-۱$ بر ۸۰ بخش‌پذیر است. $(x \in N)$

۴۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم $۱۵^{۲۶}-۲^{۳۹}$ بر ۲۱۷ چیست؟

۴۷. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم دو عبارت $x^{۳}+۴x-۱$ و $x^{۳}+mx-۴m$ بر $x+۱$ یکی باشند، مقدار m را تعیین کنید.

۴۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1$ را بر $x^2 - 3x + 2$ تعیین کنید.

۴۹. ضرایب m، n و p را به طریقی تعیین کنید که عبارت:

$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$$

بر $(x^2 - 1)(x - 3)$ بخش‌پذیر باشد.

۵۰.ضرایب p و q را چنان تعیین کنید که عبارت $x^4 + px^2 + q$ بر $x^2 + 2x + 5$ بخش‌پذیر باشد.

۵۱.اگر باقی‌مانده‌ی $p(x)$ بر $x + 1$ و $x - 1$ به‌ترتیب ۲ و ۴- باشد، باقی‌مانده‌ی $p(x)$ را بر $x^2 - 1$ تعیین کنید.

۵۲. عبارت درجه‌ی دومی پیدا کنید که بر $x - 1$ و $x - 3$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده‌ی آن بر $x - 2$ مساوی ۵ باشد.

۵۳. m و n را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^4 - 3x^2 + mx + n$ بر $x^2 - 2x + 4$ بخش‌پذیر باشد.

۵۴. اگر در تقسیم $x^6 + ax + b$ بر $(x - 2)(x + 3)$ باقی‌مانده برابر $2x + 1$ شود، مقادیر a و b را تعیین کنید.

۵۵. a و b را طوری تعیین کنید که عبارت $x^5 + ax^3 - 2bx^2 + 2$ بر $x^2 - 1$ بخش‌پذیر باشد.

فصل هشتم

رادیکال

ریشه‌ی طبیعی یک عدد

اگر $a \geq ۰$ و $n \in N$ آن‌گاه عدد منحصربه‌فردی مانند $b \geq ۰$ وجود دارد که $b^n = a$.
در این صورت مقدار b را با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم و آن‌را ریشه‌ی nام عدد a می‌نامیم. عدد n که بزرگ‌تر از یک می‌باشد فرجه نامیده می‌شود.

نکته: اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a}$ همواره وجود دارد. ولی اگر n زوج باشد، ریشه‌ی nام اعداد منفی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف **نمی‌شود**.

مثال ۱ :

الف) $\sqrt{۸۱} = ۹$

ب) $\sqrt[۳]{۱۲۵} = ۵$

ج) $\sqrt[۴]{۸۱} = ۳$

د) $\sqrt[۵]{۳۲} = ۲$

هـ) $\sqrt[۳]{\frac{-۸}{۲۷}} = \frac{-۲}{۳}$

و) $\sqrt[۴]{-۱۶} \notin R$

☆ قدرمطلق

اگر a عددی حقیقی باشد قدرمطلق a که با نماد $|a|$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq ۰) \\ -a & (a < ۰) \end{cases}$$

مثال ۲ :

الف) $|+۷| = ۷$

ب) $|-۷| = -(-۷) = ۷$

ج) $|۰| = ۰$

د) $|۱-\sqrt{۳}| = -(۱-\sqrt{۳}) = \sqrt{۳}-۱$

نکته: اگر a یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه: $\sqrt{a^{۲}} = |a|$

مثال ۳ :

الف) $\sqrt{۵^{۲}} = |۵| = ۵$

ب) $\sqrt{(-۵)^{۲}} = |-۵| = ۵$

ج) $\sqrt{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲}} = |\sqrt{۳}-\sqrt{۲}| = \sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

د) $\sqrt{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۲}} = |\sqrt{۲}-\sqrt{۳}| = -(\sqrt{۲}-\sqrt{۳}) = \sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

نکته: به‌طور کلی اگر a یک عدد حقیقی و n عددی زوج باشد: $\sqrt[n]{a^{n}} = |a|$

و اگر n عدد فرد باشد: $\sqrt[n]{a^{n}} = a$

مثال ۴ :

الف) $\sqrt[۴]{۵^{۴}} = |۵| = ۵$

ب) $\sqrt[۴]{(-۵)^{۴}} = |-۵| = ۵$

ج) $\sqrt[۵]{-۳۲} = \sqrt[۵]{(-۲)^{۵}} = -۲$

د) $\sqrt[۳]{(۲-\sqrt{۵})^{۳}} = ۲-\sqrt{۵}$

هـ) $\sqrt[۶]{(۲-\sqrt{۵})^{۶}} = |۲-\sqrt{۵}| = \sqrt{۵}-۲$

و) $\sqrt[۴]{(x-۱)^{۴}} = |x-۱| = \begin{cases} x-۱ & x \geq ۱ \\ -x+۱ & x < ۱ \end{cases}$

ز) $\sqrt[۵]{(x-۱)^{۵}} = x-۱$

☆ قواعد محاسبه با رادیکال‌ها

۱) اگر a و b دو عدد حقیقی و $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ قابل تعریف باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\sqrt[n]{a}=x$ و $\sqrt[n]{b}=y$ در این صورت $x^n=a$ و $y^n=b$.

$$x^n y^n = ab \Rightarrow (xy)^n = ab \Rightarrow xy=\sqrt[n]{ab} \Rightarrow \sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

مثال ۵ :

الف) $\sqrt{۳}\times\sqrt{۲۷}=\sqrt{۳\times ۲۷}=\sqrt{۸۱}=۹$

ب) $\sqrt[۳]{-۲}\times\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{-۲\times ۴}=\sqrt[۳]{-۸}=-۲$

ج) $\sqrt[۴]{۳-\sqrt{۸}}\times\sqrt[۴]{۳+\sqrt{۸}}=\sqrt[۴]{(۳-\sqrt{۸})(۳-\sqrt{۸})}=\sqrt[۴]{۹-۸}=\sqrt[۴]{۱}=۱$

د) $\sqrt{\sqrt{۲}}\times\sqrt{\sqrt{۸}}=\sqrt{\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}}=\sqrt{\sqrt{۱۶}}=\sqrt{۴}=۲$

هـ) $\sqrt[۵]{۲-\sqrt{۵}}\times\sqrt[۵]{۲+\sqrt{۵}}=\sqrt[۵]{(۲-\sqrt{۵})(۲+\sqrt{۵})}=\sqrt[۵]{۴-۵}=\sqrt[۵]{-۱}=-۱$

نکته: اگر n عددی فرد یا a و b نامنفی باشند، آن‌گاه: $\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

و اگر n عددی زوج و a و b منفی باشند، آن‌گاه: $\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{|a|}.\sqrt[n]{|b|}$

۲) اگر $\sqrt[n]{a}$ قابل تعریف باشد، آن‌گاه:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$

زیرا:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\underbrace{\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\ldots\times\sqrt[n]{a}}_{m\ \text{بار}}=\sqrt[n]{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m\ \text{بار}}}=\sqrt[n]{a^m}$$

نتیجه:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a| & n\ \text{زوج}\\ a & n\ \text{فرد}\end{cases}$$

مثال ۶ :

الف) $\left(\sqrt[۳]{۵}\right)^{۲}=\sqrt[۳]{۵^{۲}}=\sqrt[۳]{۲۵}$

ب) $\left(\sqrt[۷]{-۵}\right)^{۷}=\sqrt[۷]{(-۵)^{۷}}=-۵$

۳) اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ قابل تعریف باشند و $b \neq 0$ در این صورت:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

مثال ۷ :

الف) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$

ب) $\sqrt[6]{320} \div \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{64} = 2$

ج) $\sqrt[7]{10^{12}} \div \sqrt[7]{10^{5}} = \sqrt[7]{10^{7}} = 10$

د) $\frac{\sqrt{12} \times \sqrt{15}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{20}} = \sqrt{9} = 3$

نکته: اگر n فرد یا $a \geq 0$ و $b > 0$ آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

و اگر n زوج و a و b منفی باشند:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$$

۴) اگر n عددی زوج و a و b نامنفی باشند، آن‌گاه:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

اگر n فرد باشد، رابطه‌ی فوق همواره برقرار است.

اثبات: فرض می‌کنیم $\sqrt[n]{b} = x$ در این صورت $x^n = b$.

$$a^n x^n = a^n b \Rightarrow (ax)^n = a^n b \Rightarrow ax = \sqrt[n]{a^n b} \Rightarrow a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

مثال ۸ :

الف) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{45}$

ب) $-2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(-2)^3 \times 5} = \sqrt[3]{-40}$

ج) $5\sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{5^3 \times (-2)} = \sqrt[3]{-250}$

د) $-3\sqrt{7} = -\sqrt{3^2 \times 7} = -\sqrt{63}$

نکته:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a\sqrt[n]{b} & n \text{ فرد} \\ |a|\sqrt[n]{b} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

مثال ۹:

الف) $\sqrt[۳]{۱۰۵} = \sqrt[۳]{۳^۳ \times ۵} = ۳\sqrt[۳]{۵}$

ب) $\sqrt[۵]{۶۴} = \sqrt[۵]{۲^۵ \times ۲} = ۲\sqrt[۵]{۲}$

ج) $\sqrt[۴]{۱۱۲} = \sqrt[۴]{۲^۴ \times ۷} = ۲\sqrt[۴]{۷}$

د) $\sqrt{۹۸} = \sqrt{۷^۲ \times ۲} = ۷\sqrt{۲}$

۵) اگر m و n دو عدد طبیعی و $\sqrt[n]{a}$ قابل تعریف باشد، در این صورت:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$ (اگر $\sqrt[n]{a}$ منفی باشد m فرد است).

مثال ۱۰:

الف) $\sqrt[۳]{\sqrt{۵}} = \sqrt[۶]{۵}$

ب) $\sqrt[۴]{\sqrt[۵]{۱۰}} = \sqrt[۲۰]{۱۰}$

ج) $\sqrt[۳]{\sqrt[۵]{-۲}} = \sqrt[۱۵]{-۲}$

د) $\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{\sqrt{۵}}} = \sqrt[۲۴]{۵}$

نکته:

$\sqrt{\sqrt[۳]{-۸}} \notin R$ $\qquad$ $\sqrt{\sqrt[۳]{\sqrt[۵]{-۱}}} \notin R$

۶) اگر $a \geq ۰$ باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی k:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$$

مثال ۱۱:

الف) $\sqrt[۳]{۵} = \sqrt[۶]{۲۵}$

ب) $\sqrt[۵]{۱۰} = \sqrt[۱۰]{۱۰۰}$

ج) $\sqrt[۱۲]{۵^۶} = \sqrt{۵}$

د) $\sqrt[۱۴]{(-۲)^{۱۰}} = \sqrt[۷]{۲^۵}$

نکته: اگر m و n اعداد طبیعی و a عددی حقیقی باشند و $\sqrt[mn]{a^n}$ تعریف شده باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[mn]{a^n} = \begin{cases} \sqrt[m]{a} & n \text{ فرد} \\ \sqrt[m]{|a|} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

مثال ۱۲:

الف) $\sqrt[۶]{(-۵)^۲} \neq \sqrt[۳]{-۵}$

ب) $\sqrt[۸]{(-۲)^۴} \neq \sqrt{-۲}$

ج) $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۲})^۲} \neq \sqrt{۱-\sqrt{۲}}$

د) $\sqrt[۵]{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^۳} \neq \sqrt[۱۰]{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^۶}$

مثال ۱۳: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{۲} \times \sqrt[۴]{۸}$

ب) $\sqrt[۳]{۱۶} \times \sqrt[۶]{۱۶}$

ج) $\sqrt[۳]{۲۵} \times \sqrt{۱۲۵} \times \sqrt[۴]{۱۲۵} \times \sqrt[۱۲]{۵}$

د) $\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}} \times \sqrt[۶]{۷+۴\sqrt{۳}}$

هـ) $\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{\sqrt{۵^{۲۵}}}} \times \sqrt{\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۵^{۲۳}}}}$

و) $۲\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۲\sqrt{۲}}} \times ۲\sqrt[۶]{\sqrt[۴]{۲^{۱۳}}}$

حل:

الف) $\sqrt{۲} \times \sqrt[۴]{۸} = \sqrt[۴]{۲^۲} \times \sqrt[۴]{۸} = \sqrt[۴]{۳۲}$

ب) $\sqrt[۳]{۱۶} \times \sqrt[۶]{۱۶} = \sqrt[۶]{۱۶^۲} \times \sqrt[۶]{۱۶} = \sqrt[۶]{۱۶^۳} = \sqrt[۶]{۲^{۱۲}} = ۲^۲ = ۴$

ج) $\sqrt[۳]{۲۵} \times \sqrt{۱۲۵} \times \sqrt[۴]{۱۲۵} \times \sqrt[۱۲]{۵} = \sqrt[۱۲]{۵^۸} \times \sqrt[۱۲]{۵^{۱۸}} \times \sqrt[۱۲]{۵^۹} \times \sqrt[۱۲]{۵}$

$= \sqrt[۱۲]{۵^۸ \times ۵^{۱۸} \times ۵^۹ \times ۵} = \sqrt[۱۲]{۵^{۳۶}} = ۵^۳ = ۱۲۵$

د) $\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}} \times \sqrt[۶]{۷+۴\sqrt{۳}} = \sqrt[۶]{(۲-\sqrt{۳})^۲} \times \sqrt[۶]{(۷+۴\sqrt{۳})}$

$= \sqrt[۶]{(۷-۴\sqrt{۳})} \times \sqrt[۶]{(۷+۴\sqrt{۳})} = \sqrt[۶]{(۷-۴\sqrt{۳})(۷+۴\sqrt{۳})} = \sqrt[۶]{۴۹-۴۸} = ۱$

هـ) $\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{\sqrt{۵^{۲۵}}}} \times \sqrt{\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۵^{۲۳}}}} = \sqrt[۲۴]{۵^{۲۵}} \times \sqrt[۲۴]{۵^{۲۳}} = \sqrt[۲۴]{۵^{۴۸}} = ۵^۲ = ۲۵$

و) $۲\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۲\sqrt{۲}}} \times ۲\sqrt[۶]{\sqrt[۴]{۲^{۱۳}}} = \sqrt[۳]{۲^۴\sqrt[۴]{۲\sqrt{۲}}} \times \sqrt[۶]{۲^۶\sqrt[۴]{۲^{۱۳}}} = \sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۲^{۱۷}\sqrt{۲}}} \times \sqrt[۶]{\sqrt[۴]{۲^{۳۷}}}$

$= \sqrt[۳]{\sqrt[۴]{\sqrt{۲^{۳۵}}}} \times \sqrt[۶]{\sqrt[۴]{۲^{۳۷}}} = \sqrt[۲۴]{۲^{۳۵}} \times \sqrt[۲۴]{۲^{۳۷}} = \sqrt[۲۴]{۲^{۷۲}} = ۲^۳ = ۸$

☆ رادیکال‌های متشابه

دو رادیکال را متشابه گوییم، در صورتی‌که فرجه‌ها مساوی و عبارات زیر رادیکال یکسان باشند. به عنوان مثال $\sqrt[3]{7}$ و $5\sqrt[3]{7}$ و $-3\sqrt[3]{7}$ متشابهند. اما $\sqrt{5}$ و $\sqrt[3]{5}$ متشابه نیستند.

☆ جمع و تفریق رادیکال‌ها

رادیکال‌های متشابه را می‌توان با هم جمع یا تفریق کرد که برای این منظور ضرایب رادیکال‌ها را جمع یا تفریق کرده و یکی از رادیکال‌ها را می‌نویسیم.

مثال ۱۴ :عبارات زیر را ساده کنید:

الف) $5\sqrt{7}+4\sqrt{7}-2\sqrt{7}$

ب) $2\sqrt{18}-3\sqrt{32}+\sqrt{12}-\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{64}$

ج) $\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}-3\sqrt[3]{686}$

د) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$

هـ) $(\sqrt{3}-2)^{18}\times(\sqrt{3}+2)^{16}$

و) $2\sqrt[3]{16}-5\sqrt[3]{24}+3\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{192}$

ز) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\,(1-\sqrt{2})$

ح) $\sqrt[4]{(2\sqrt{5}-5\sqrt{2})^4}-\sqrt{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2}$

حل:

الف) $5\sqrt{7}+4\sqrt{7}-2\sqrt{7}=(5+4-2)\sqrt{7}=7\sqrt{7}$

ب) $2\sqrt{18}-3\sqrt{32}+\sqrt{12}-\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{64}=2\sqrt{9\times2}-3\sqrt{16\times2}+\sqrt{4\times3}-\sqrt{3}-\sqrt{8}$
$=6\sqrt{2}-12\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}=-\sqrt{3}-8\sqrt{2}$

ج) $\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}-3\sqrt[3]{686}=\sqrt[3]{27\times2}-2\sqrt[3]{8\times2}+\sqrt[3]{64\times2}-3\sqrt[3]{343\times2}$
$=3\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}-21\sqrt[3]{2}=-18\sqrt[3]{2}$

د) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2=5+2+2\sqrt{10}-(5+2-2\sqrt{10})=4\sqrt{10}$

هـ) $(\sqrt{3}-2)^{18}\times(\sqrt{3}+2)^{16}=(\sqrt{3}-2)^2\times(\sqrt{3}-2)^{16}\times(\sqrt{3}+2)^{16}$
$=(\sqrt{3}-2)^2\times(3-4)^{16}=(\sqrt{3}-2)^2=3+4-4\sqrt{3}=7-4\sqrt{3}$

و) $۲\sqrt[۳]{۱۶}-۵\sqrt[۳]{۲۴}+۳\sqrt[۳]{۲۵۰}+\sqrt[۳]{۱۹۲}=۲\sqrt[۳]{۸\times۲}-۵\sqrt[۳]{۸\times۳}+۳\sqrt[۳]{۱۲۵\times۲}$
$+\sqrt[۳]{۶۴\times۳}=۴\sqrt[۳]{۲}-۱۰\sqrt[۳]{۳}+۱۵\sqrt[۳]{۲}+۴\sqrt[۳]{۳}=۱۹\sqrt[۳]{۲}-۶\sqrt[۳]{۳}$

ز) $\sqrt[۳]{۵\sqrt{۲}+۷}\,(۱-\sqrt{۲})=\sqrt[۳]{۵(\sqrt{۲}+۷)(۱-\sqrt{۲})^۳}$
$=\sqrt[۳]{(۵\sqrt{۲}+۷)(۱-۳\sqrt{۲}+۶-۲\sqrt{۲})}$
$=\sqrt[۳]{(۷+۵\sqrt{۲})(۷-۵\sqrt{۲})}=\sqrt[۳]{۴۹-۵۰}=\sqrt[۳]{-۱}=-۱$

ح) $\sqrt[۴]{(۲\sqrt{۵}-۵\sqrt{۲})^۴}-\sqrt{(۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵})^۲}=|۲\sqrt{۵}-۵\sqrt{۲}|-|۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵}|$
$=-۲\sqrt{۵}+۵\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}+۲\sqrt{۵}=۰$

نکته:

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$ $\qquad$ $\sqrt{a^۲+b^۲}\neq a+b$

مثال ۱۵ : اگر $۳ > x > ۲$ عبارت زیر را ساده کنید.

$\sqrt{x^۲-۶x+۹}+\sqrt{۴-۴x+x^۲}$

حل:

$۲<x<۳\Rightarrow x-۳<۰\ ,\ ۲-x<۰$
$\sqrt{x^۲-۶x+۹}+\sqrt{۴-۴x+x^۲}=\sqrt{(x-۳)^۲}+\sqrt{(۲-x)^۲}=|x-۳|+|۲-x|$
$=-(x-۳)-(۲-x)=-x+۳-۲+x=۱$

مثال ۱۶ : ثابت کنید:

$(۴+\sqrt{۱۵})(\sqrt{۱۰}-\sqrt{۶})\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}=۲$

حل:

$(۴+\sqrt{۱۵})\sqrt{(\sqrt{۱۰}-\sqrt{۶})^۲}.\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}=(۴+\sqrt{۱۵})\sqrt{۱۶-۴\sqrt{۱۵}}.\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}$
$=(۴+\sqrt{۱۵})\times۲\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}.\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}=۲(۴+\sqrt{۱۵})(۴-\sqrt{۱۵})=۲(۱۶-۱۵)$
$=۲\times۱=۲$

مثال ۱۷ : ثابت کنید:

$\sqrt[۳]{۳۰\sqrt{۳}+۳۷}-\sqrt[۳]{۳۰\sqrt{۳}-۳۷}=۲$

حل:

$$\sqrt[3]{30\sqrt{3}+37}-\sqrt[3]{30\sqrt{3}-37}=x \to (\sqrt[3]{30\sqrt{3}+37}-\sqrt[3]{30\sqrt{3}-37})^3=x^3$$

$$\Rightarrow 30\sqrt{3}+37-30\sqrt{3}+37-3\sqrt[3]{30\sqrt{3}+37}\times\sqrt[3]{30\sqrt{3}-37}$$

$$(\sqrt[3]{30\sqrt{3}+37}-\sqrt[3]{30\sqrt{3}-37})=x^3 \Rightarrow$$

$$74-3\times\sqrt[3]{1331}\times x=x^3 \Rightarrow 74-33x=x^3 \Rightarrow x^3+33x-74=0$$

$$x^3+33x-66-8=0 \Rightarrow (x^3-8)+(33x-66)=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4)+33(x-2)$$

$$(x-2)(x^2+2x+4+33)=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+1+36)=0$$

$$\Rightarrow (x-2)[(x+1)^2+36]=0 \to x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

مثال ۱۸ : ثابت کنید:

$$\sqrt{10+3\sqrt{10+3\sqrt{10+3\sqrt{\dots}}}}=5$$

حل:

فرض کنیم:

$$\sqrt{10+3\sqrt{10+3\sqrt{10+3\sqrt{\dots}}}}=x$$

در این صورت:

$$10+3\sqrt{10+3\sqrt{10+3\sqrt{\dots}}}=x^2 \Rightarrow 10+3x=x^2$$

$$x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x-5)(x+2)=0$$

$x-5=0 \Rightarrow x=5$ یا $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ غیرممکن

☆ توان کسری

اگر a عددی حقیقی و m و n دو عدد طبیعی و $n \geq 2$ باشد، آن‌گاه:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

مثال ۱۹ :

الف) $36^{\frac{1}{2}}=\sqrt{36}=6$

ب) $۲۷^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۲۷^۲} = \sqrt[۳]{۳^۶} = ۳^۲ = ۹$

ج) $۳۲^{\frac{۳}{۵}} = \sqrt[۵]{۳۲^۳} = \sqrt[۵]{۲^{۱۵}} = ۲^۳ = ۸$

د) $۶۴^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۶۴^{\frac{۱}{۳}}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۶۴}} = \frac{۱}{۴}$

مثال ۲۰ : عبارات زیر را به‌صورت یک عدد با توان کسری بنویسید.

الف) $\sqrt[۳]{۵}$ ب) $\sqrt{۱۰}$ ج) $\sqrt[۴]{۲^۳}$ د) $\sqrt[۵]{۳^{۱۰}}$

حل:

الف) $\sqrt[۳]{۵} = ۵^{\frac{۱}{۳}}$ ب) $\sqrt{۱۰} = ۱۰^{\frac{۱}{۲}}$

ج) $\sqrt[۴]{۲^۳} = ۲^{\frac{۳}{۴}}$ د) $\sqrt[۵]{۳^{۱۰}} = ۳^{\frac{۱۰}{۵}} = ۳^۲$

مثال ۲۱ : حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $۸۱^{\frac{۵}{۴}}$ ب) $(۰/۲۵)^{-\frac{۳}{۲}}$

ج) $\left(\frac{۲۷}{۸}\right)^{-\frac{۲}{۳}}$ د) $(۰/۰۱)^{-۲/۵}$

حل:

الف) $۸۱^{\frac{۵}{۴}} = \sqrt[۴]{۸۱^۵} = \sqrt[۴]{۳^{۲۰}} = ۳^{\frac{۲۰}{۴}} = ۳^۵ = ۲۴۳$

ب) $(۰/۲۵)^{-\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{(۰/۲۵)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{(۰/۲۵)^۳}} = \frac{۱}{\sqrt{\left(\frac{۱}{۴}\right)^۳}} = \frac{۱}{\sqrt{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۶}} = \frac{۱}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳} = \frac{۱}{\frac{۱}{۸}} = ۸$

ج) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{2}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^{6}}}=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2}}=\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}$

د) $(0/01)^{-2/5}=100^{2/5}=100^{\frac{5}{2}}=\sqrt{100^{5}}=\sqrt{10^{10}}=10^{5}=100000$

مثال ۲۲ : عبارات زیر را به‌صورت توانی از ۲ بنویسید.

الف) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[5]{2}}}$

ب) $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$

ج) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\sqrt[5]{2}$

د) $\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

حل:

الف) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[5]{2}}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^{2}\sqrt[5]{2}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{2^{16}}}}=\sqrt[30]{2^{16}}=2^{\frac{16}{30}}=2^{\frac{8}{15}}$

ب) $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{128}}}}=\sqrt[8]{\frac{1}{128}}=\sqrt[8]{2^{-7}}=2^{-\frac{7}{8}}$

ج) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\sqrt[5]{2}=\sqrt[3]{2^{2}}\times\sqrt{2^{3}}\times\sqrt[5]{2}=2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{71}{30}}$

د) $\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\times2^{\frac{1}{4}}\times\sqrt[8]{2}=2^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{1}{8}}=2^{-\frac{1}{8}}$

مثال ۲۳ : عبارات زیر را ساده کنید:

الف) $\sqrt[10]{5^{20}\times2^{30}}$

ب) $\sqrt[13]{3^{26}\times2^{39}}$

ج) $\sqrt[5]{2^{7}\times3^{6}}$

د) $\sqrt[3]{5^{4}\times2^{10}}$

حل:

الف) $\sqrt[10]{5^{20}\times2^{30}}=\sqrt[10]{5^{20}}\times\sqrt[10]{2^{30}}=5^{\frac{20}{10}}\times2^{\frac{30}{10}}=5^2\times2^3=25\times8=200$

ب) $\sqrt[13]{3^{26}\times2^{39}}=3^{\frac{26}{13}}\times2^{\frac{39}{13}}=3^2\times2^3=9\times8=72$

ج) $\sqrt[5]{2^7\times3^6}=\sqrt[5]{2^5\times2^2\times3^5\times3}=2\times3\sqrt[5]{2^2\times3}=6\sqrt[5]{12}$

د) $\sqrt[3]{5^4\times2^{10}}=\sqrt[3]{5^3\times5\times2^9\times2}=5\times2^3\sqrt[3]{5\times2}=40\sqrt[3]{10}$

مثال ۲۴ : اگر $x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}=1$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$A=x^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{3}{4}}-3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

حل:

$$A=x^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{3}{4}}-3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}=\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)^3+3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)-3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

$$=1^3+3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\times1-3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}=1$$

مثال ۲۵ : اگر $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{2}}$ ثابت کنید:

$$(a-b)^2-2c(a+b)+c^2=0$$

حل:

$$a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{c})^2\Rightarrow a+b+2\sqrt{ab}=c$$
$$a+b-c=-2\sqrt{ab}\Rightarrow(a+b-c)^2=4ab$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc=4ab$$
$$a^2+b^2-2ab-2ac-2bc+c^2=0$$
$$(a-b)^2-2c(a+b)+c^2=0$$

مثال ۲۶ :ثابت کنید: $\sqrt[20]{2} + \sqrt[30]{3} > 2$

حل:

$$\frac{1}{20} > 0 \Rightarrow \sqrt[20]{2} = 2^{\frac{1}{20}} > 2^0 = 1$$

$$\frac{1}{30} > 0 \Rightarrow \underline{\sqrt[30]{3} = 3^{\frac{1}{30}} > 3^0 = 1}$$

$$\sqrt[20]{2} + \sqrt[30]{3} > 2$$

مثال ۲۷ : اگر $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ **باشد، حاصل** $x^3 - 3x$ **چیست؟**

حل:

با توجه به اتحاد $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ خواهیم داشت:

$$x^3 = (\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}})^3 = (1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2}) - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$
$$\times(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} + 3x \Rightarrow x^3 - 3x = 2\sqrt{2}$$

مثال ۲۸ : اگر $x = \sqrt{2} - 1$ **باشد، مقدار عددی عبارت** $(x - x^{-1})^{\frac{1}{2}}$ **را حساب کنید.**

حل:

$$(x - x^{-1})^{\frac{1}{2}} = (x - \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}} = \sqrt{\frac{1+2-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات لازم است تا در محاسبات کسری، مخرج کسرهایی که شامل عبارت رادیکالی می‌باشند به گونه‌ای نوشته شوند که مخرج فاقد رادیکال باشد. این کار را گویا کردن مخرج کسر می‌نامند. برای گویا کردن مخرج کسرها چند روش کلاسیک وجود دارد و در حالت کلی نمی‌توان فرمولی ارائه کرد که مخرج هر کسر با هر رادیکالی را بتواند گویا کند. ولی به هر حال با در پیش گرفتن یک روش منطقی با ترکیبی از روش‌های کلاسیک مخرج کسر را می‌توان گویا کرد.

۱) گویا کردن مخرج کسرهایی که عبارت مخرج آن‌ها به‌صورت $\sqrt[n]{a^m}$ $(m<n)$ می‌باشد.

برای گویا کردن مخرج چنین کسرهایی کافیست صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب کنیم:

مثال ۲۹ : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$ ب) $\frac{۲}{\sqrt[۵]{۱۶}}$ ج) $\frac{۳}{\sqrt[۹]{۱۲۸}}$ د) $\frac{۵}{\sqrt[۷]{۹}}$

حل:

الف) $\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۰\sqrt{۵}}{۵}=۲\sqrt{۵}$

ب) $\frac{۲}{\sqrt[۵]{۱۶}}=\frac{۲}{\sqrt[۵]{۲^۴}}\times\frac{\sqrt[۵]{۲}}{\sqrt[۵]{۲}}=\frac{۲\sqrt[۵]{۲}}{\sqrt[۵]{۲^۵}}=\frac{۲\sqrt[۵]{۲}}{۲}=\sqrt[۵]{۲}$

ج) $\frac{۳}{\sqrt[۹]{۱۲۸}}=\frac{۳}{\sqrt[۹]{۲^۷}}\times\frac{\sqrt[۹]{۲^۲}}{\sqrt[۹]{۲^۲}}=\frac{۳\sqrt[۹]{۴}}{۲}$

د) $\frac{۵}{\sqrt[۷]{۹}}=\frac{۵}{\sqrt[۷]{۳^۲}}\times\frac{\sqrt[۷]{۳^۵}}{\sqrt[۷]{۳^۵}}=\frac{۵\sqrt[۷]{۳^۵}}{\sqrt[۷]{۳^۷}}=\frac{۵\sqrt[۷]{۲۴۳}}{۳}$

۲) گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج به‌صورت $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ می‌باشد. (با فرض $a\neq b$)

در این حالت صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

$$\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

مثال ۳۰ : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ب) $\frac{8}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

ج) $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$ د) $\frac{7}{3+\sqrt{5}}$

حل:

الف) $$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

ب) $$\frac{8}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}=\frac{8(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})}=\frac{8(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{3-7}=-2(\sqrt{3}+\sqrt{7})$$

ج) $$\frac{5}{2-\sqrt{3}}=\frac{5(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{5(2+\sqrt{3})}{4-3}=5(2+\sqrt{3})$$

د) $$\frac{7}{3+\sqrt{5}}=\frac{7(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{7(3-\sqrt{5})}{9-5}=\frac{7(3-\sqrt{5})}{4}$$

گاهی اوقات لازم است که صورت و مخرج کسر را بیش از یک بار در مزدوج ضرب کنیم. این حالت معمولاً زمانی اتفاق می‌افتد که فرجه‌ی رادیکال‌های به‌کار رفته در مخرج توانی از ۲ باشند، یا در مخرج بیش از یک رادیکال با فرجه‌ی توانی از ۲ داشته باشیم.

مثال ۳۱ :مخرج کسرهای زیر را گویا کنید:

الف) $\frac{5}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$ ب) $\frac{3}{2-\sqrt[4]{2}}$

ج) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ د) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}$

حل:

الف) $$\frac{5}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}=\frac{5(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})}{(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})}=\frac{5(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$=5(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

ب) $\frac{3}{2-\sqrt[4]{2}}\times\frac{2+\sqrt[4]{2}}{2+\sqrt[4]{2}}=\frac{3(2+\sqrt[4]{2})}{4-\sqrt{2}}\times\frac{4+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}=\frac{3(2+\sqrt[4]{2})(4+\sqrt{2})}{14}$

ج) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\times\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{12}$

د) $\frac{2}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})+1}\times\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})-1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})-1}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)}{5-2\sqrt{6}-1}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{6}}\times\frac{2+\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}$

$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{6})}{4-6}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{6})}{2}$

۳) گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آن‌ها به‌صورت $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ یا $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\pm\sqrt[3]{ab}$ می‌باشند.

اگر مخرج به‌صورت $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}$؛

اگر مخرج به‌صورت $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}$؛

اگر مخرج به‌صورت $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{ab}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$؛

اگر مخرج به‌صورت $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{ab}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}$ ضرب می‌کنیم.

مثال ۳۲ : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$

ب) $\frac{2}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}$

ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}}$

د) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{20}}$

هـ) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$

و) $\frac{1}{\sqrt[6]{3}-\sqrt[3]{2}}$

حل:

(الف $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۱۰}}{\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۱۰}}=\frac{\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۱۰}}{۷}$

(ب $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۳}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۲۱}}{\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۲۱}}=\frac{۲(\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۲۱})}{۷-۳}=\frac{\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۲۱}}{۲}$

(ج $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۶}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}}{۵}$

(د $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۶}+\sqrt[۳]{۲۰}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۴}}=\frac{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۴}}{۵-۴}=\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۴}$

(هـ $\frac{۱}{۲-\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{۴+\sqrt[۳]{۴}+۲\sqrt[۳]{۲}}{۴+\sqrt[۳]{۴}+۲\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۴+\sqrt[۳]{۴}+۲\sqrt[۳]{۲}}{۸-۲}=\frac{۴+\sqrt[۳]{۴}+۲\sqrt[۳]{۲}}{۶}$

و) ابتدا صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\sqrt[۶]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۶]{۳}+\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۶]{۳}+\sqrt[۳]{۲}}=\frac{\sqrt[۶]{۳}+\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۱۶}+\sqrt[۳]{۱۲}}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۱۶}+\sqrt[۳]{۱۲}}$$

$$=\frac{(\sqrt[۶]{۳}+\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۱۶}+\sqrt[۳]{۱۲})}{۳-۴}=-(\sqrt[۶]{۳}+\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۱۶}+\sqrt[۳]{۱۲})$$

مثال ۳۳ :اگر $x=۳-\sqrt{۲}$ باشد، ثابت کنید $x^{۲}=\frac{۴۹}{۱۱+۶\sqrt{۲}}$:

حل:

$$x=۳-\sqrt{۲}\Rightarrow x=\frac{(۳-\sqrt{۲})(۳+\sqrt{۲})}{۳+\sqrt{۲}}=\frac{۷}{۳+\sqrt{۲}}\Rightarrow x^{۲}=\frac{۴۹}{۱۱+۶\sqrt{۲}}$$

مثال ۳۴ :اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+۲}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}}=\sqrt{n+۱}-۱$$

حل:

صورت و مخرج هر کسر را در مزدوج مخرجش ضرب کرده و حاصل‌ها را با هم جع می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{۲}-۱}{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}+\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}+\frac{(۲-\sqrt{۳})}{(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})}+\dots$$

$$+\frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})}=(\sqrt{۲}-۱)+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})+(۲-\sqrt{۳})$$

$$+\dots+(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})=\sqrt{n+۱}-۱$$

مثال ۳۵ : حداکثر مقدار $n \in N$ چقدر باشد تا نامساوی زیر برقرار باشد؟

$$\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}>۰/۱۱$$

حل:

$$\sqrt{n+۱}>۰/۱۱+\sqrt{n}\Rightarrow n+۱>۰/۰۱۲۱+n+۰/۲۲\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow ۰/۹۸۷۹>۰/۲۲\sqrt{n}\Rightarrow \frac{۹۸/۷۹}{۲۲}>\sqrt{n}\Rightarrow \left(\frac{۹۸/۷۹}{۲۲}\right)^{۲}>n\Rightarrow ۲۰/۱۶۴>n$$

این نشان می‌دهد که بیش‌ترین مقدار عدد طبیعی n برابر ۲۰ می‌باشد.

☆ رادیکال مرکب

فرض کنیم $A\ ,\ B>۰$ دو عدد حقیقی باشند. هر عبارت به صورت $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ یا $\sqrt{A-\sqrt{B}}$ را یک رادیکال مرکب می‌گویند. منظور از ساده کردن یک رادیکال مرکب، نوشتن آن به‌صورت $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ در حالت اول و یا $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ در حالت دوم می‌باشد.

مثال ۳۶ : در رادیکال مرکب $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ با فرض آن‌که $A^{۲}-B$ مربع کامل باشد،با درنظر گرفتن $C=\sqrt{A^{۲}-B}$ ثابت کنید:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}+\sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

حل:

فرض کنیم $C=\sqrt{A^{۲}-B}$ و $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ $(x\geq y)$. با به توان رساندن طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$A+\sqrt{B}=(x+y)+\sqrt{۴xy}$$

با مقایسه‌ی طرفین این تساوی داریم:

$$\begin{cases}x+y=A\\ ۴xy=B\end{cases}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۲xy=A^{۲}$$

$$A^{۲}-B=C^{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۲xy-۴xy=C^{۲}\Rightarrow (x-y)^{۲}=C^{۲}\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{x\geq y} x-y=C$$

$$\begin{cases}x-y=C\\ x+y=A\end{cases}\to x=\frac{A+C}{۲} \text{ و } y=\frac{A-C}{۲}$$

لذا می‌توان گفت:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}+\sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که اگر $C=\sqrt{A^{۲}-B}$. آن‌گاه به شرط تعریف شدن $\sqrt{A-\sqrt{B}}$:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}-\sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

مثال ۳۷ : رادیکال‌های مرکب زیر را ساده کنید:

الف) $\sqrt{۷+\sqrt{۴۰}}$

ب) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}$

حل:

الف) $C=\sqrt{A^{۲}-B}=\sqrt{۴۹-۴۰}=\sqrt{۹}=۳$

$$\sqrt{۷+\sqrt{۴۰}}=\sqrt{\frac{۷+۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۷-۳}{۲}}=\sqrt{۵}+\sqrt{۲}$$

ب) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{۷-\sqrt{۴۸}}$

$C=\sqrt{۴۹-۴۸}=۱$

$$\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۷+۱}{۲}}-\sqrt{\frac{۷-۱}{۲}}=۲-\sqrt{۳}$$

مثال ۳۸ : عبارت زیر را ساده کنید:

$$\sqrt{۲۷+۸\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}}$$

حل:

$$\sqrt{۲۷+۸\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}}=\sqrt{۲۷+۸\left(\sqrt{\frac{۴+۲}{۲}}-\sqrt{\frac{۴-۲}{۲}}\right)}=\sqrt{۲۷+۸(\sqrt{۳}-۱)}$$

$$=\sqrt{۱۹+۸\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۱۹+۱۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۱۹-۱۳}{۲}}=۴+\sqrt{۳}$$

تمرین‌های فصل هشتم

۱. حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt{1024}}}$

ب) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2(5+2\sqrt{6})$

ج) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{2})^2}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$

د) $\sqrt[4]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^4}+\sqrt[4]{4}$

هـ) $\sqrt{5\sqrt[3]{5}}\times\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\times\sqrt[6]{25}$

و) $\sqrt[5]{72}\times\sqrt[5]{108}$

ز) $\sqrt[4]{5\sqrt{2}-7}\times\sqrt[4]{\sqrt{2}-1}\times(\sqrt{2}+1)$

ح) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{256}}\div\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$

ط) $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})^2(11-2\sqrt{10})$

ی) $\sqrt[4]{25\times2}\times\sqrt[4]{25\times8}$

ک) $5\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}$

ل) $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$

م) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\times\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$

ن) $\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}\times\sqrt[6]{6+4\sqrt{2}}$

س) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$

ع) $\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})}\times\sqrt[3]{(9-4\sqrt{5})}$

ص) $\sqrt{252}-\sqrt{700}+\sqrt{1008}-\sqrt{448}$

ف) $5\sqrt{98}-3\sqrt{50}+2\sqrt[4]{324}$

۲. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{19}}\times\sqrt[3]{9+3\sqrt[3]{19}+\sqrt[3]{361}}$

ب) $\sqrt[5]{x^3\sqrt{x^2\sqrt[3]{x^{-1}}}}\div\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^4\sqrt{x^5}}}$

ج) $\sqrt{1+\sqrt{2}}\times\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}$

د) $2\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{15}+\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{4}{15}}$

هـ) $\sqrt{2-\sqrt[4]{3}}\times\sqrt{2+\sqrt[4]{3}}\times\sqrt{4+\sqrt{3}}$

و) $(\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48})\div(\sqrt{12}-\sqrt{675})$

ز) $(2\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[5]{16}}}-4\sqrt{\sqrt[20]{16}}+12\sqrt[8]{\sqrt[5]{16}})\div(5\sqrt{\sqrt[10]{\sqrt{16}}})$

ح) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{432}+\sqrt[3]{128}$

ط) $\sqrt{\frac{-1}{4}+\sqrt{\frac{-1}{4}+\dots+\sqrt{\frac{-1}{4}+\sqrt{\frac{1}{4}}}}}$

ی) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3}$

ک) $\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\times\sqrt[3]{4}$

ل) $\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

م) $\sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}\times\sqrt[10]{\frac{1}{2}(19+6\sqrt{10})}$

ن) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

س) $\sqrt[4]{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^4}-\sqrt[3]{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^3}+\sqrt{48}$

ع) $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\dots}}}$

ف) $\sqrt{-1+2\sqrt{-1+2\sqrt{-1+2\sqrt{\dots}}}}$

ض) $(\sqrt{5}-2)^{14}(\sqrt{5}+2)^{12}$

ق) $\left(\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}}\right)^{32}$

۳. اگر $x=2-\sqrt{3}$ باشد، حاصل $x^5-\frac{x^3}{7+4\sqrt{3}}+\frac{x}{2+\sqrt{3}}-x^2+1$ چیست؟

۴. اعداد $a=\sqrt{3}$، $b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ و $c=\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$ را مقایسه کنید.

۵. از دو عدد $\sqrt{۳+\sqrt{۳+\sqrt{۳}}}$ و ۳ کدام بزرگ‌تر است؟

۶. دو عدد $\sqrt{۱۰}-\sqrt{۱۱}$ و $\sqrt{۵}-\sqrt{۶}$ را مقایسه کنید.

۷. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\dfrac{۲}{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}-۲\sqrt{۲}}$

ب) $\dfrac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt[۴]{۶}}$

ج) $\dfrac{۸\sqrt{۲۱}}{۲\sqrt{۳}+\sqrt{۱۹}+\sqrt{۷}}$

د) $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۲}}$

هـ) $\dfrac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}$

و) $\dfrac{۱}{\sqrt[۴]{۵}-\sqrt{۲}}$

ز) $\dfrac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}+\sqrt{۶}+\sqrt{۱۵}}$

ح) $\dfrac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt[۳]{۲}}$

ط) $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}$

ی) $\dfrac{۱}{\sqrt[۴]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}$

ک) $\dfrac{۱}{\sqrt[۶]{۲}-۱}$

ل) $\dfrac{۴}{\sqrt[۴]{۱۳}-\sqrt[۴]{۹}}$

م) $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۱۲}+\sqrt[۳]{۱۶}}$

ن) $\dfrac{۲}{\sqrt[۴]{۲}+\sqrt[۴]{۴}+\sqrt[۴]{۸}+۲}$

۸. حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{۱}{۳-\sqrt{۸}}-\frac{۱}{\sqrt{۸}-\sqrt{۷}}+\frac{۱}{\sqrt{۷}-\sqrt{۶}}-\frac{۱}{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۵}-۲}$$

۹. عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{۵۷-۴۰\sqrt{۲}}-\sqrt{۴۰\sqrt{۲}+۵۷}$

ب) $\sqrt{۳+\sqrt{۵-\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}}}$

ج) $\sqrt{۶+۲\sqrt{۵-\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}}}$

د) $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\dfrac{12}{\sqrt{6}}$

هـ) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

و) $\sqrt{1+\sqrt{2}\times\sqrt{3+\sqrt{2}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$

ز) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$

ح) $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6}+11\right)$

۱۰. ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$$

۱۱. ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})=1$$

۱۲. ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}$$

۱۳.اگر $x \geq 0$ باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+1}$$

۱۴.اولاً: به ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید:

$$\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

ثانیاً: با استفاده از قسمت قبل حاصل جمع زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

۱۵. اگر $\sqrt[n]{abc}=1$، ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{ab}+\sqrt[n]{a}+1}+\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{bc}+\sqrt[n]{b}+1}+\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{ac}+\sqrt[n]{c}+1}=1$$

۱۶. ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}=2$$

۱۷. تحت چه شرایطی تساوی زیر برقرار است؟

$$\sqrt{(a^2-1)^2b}=(1-a^2)\sqrt{b}$$

۱۸. اگر $a+b+c\neq 0$ و $a^3+b^3+c^3=3abc$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a+b+c}}$ چیست؟

۱۹. اگر $x=\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2+q^3}}+\sqrt[3]{r-\sqrt{r^2+q^3}}$ باشد، ثابت کنید:

$$x^3+3qx-2r=0$$

۲۰. اگر داشته باشیم $x=\sqrt[3]{\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}}+\sqrt[3]{\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}}$، نشان دهید:

$$x^3-3x-2\times\frac{a^2+b}{a^2-b}=0$$

۲۱. اگر $0\le b\le 4a$ ثابت کنید:

$$\sqrt{8a+2\sqrt{16a^2-b^2}}-\sqrt{8a-2\sqrt{16a^2-b^2}}=2\sqrt{4a-b}$$

۲۲. اعداد زیر را به‌صورت صعودی مرتب کنید.

$a=\sqrt[4]{48}$ و $b=\sqrt[7]{32}\times\sqrt{2}$ و $c=\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}}$

۲۳. حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\left[\frac{۲-\sqrt[۴]{۹}}{\sqrt[۴]{۴}-\sqrt{۲-\sqrt[۴]{۹}}}+\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt[۶]{۸}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\right]^{۸}$$

۲۴. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\sqrt{۴+\sqrt{۷}}-\sqrt{۴-\sqrt{۷}}+\sqrt{۳+\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}}-\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۲۵. نشان دهید:

$$\frac{\sqrt{۶+\sqrt{۱۱}}-\sqrt{۶-\sqrt{۱۱}}}{\sqrt{۷+\sqrt{۱۳}}-\sqrt{۷-\sqrt{۱۳}}}=۱$$

۲۶.حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{۱۳+\sqrt{۱۷۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۷۳}+\sqrt{۱۷۷}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{۱۳۶۵}+\sqrt{۱۳۶۹}}$$

۲۷. ثابت کنید:

$$\sqrt[۳]{۱۷\sqrt{۵}+۳۸}-\sqrt[۳]{۱۷\sqrt{۵}-۳۸}=۴$$

۲۸. اگر $-۳ < x < -۲$ ، ساده شده عبارت زیر را بنویسید.

$$\sqrt{x^{۲}-۴|x|+۴}+\sqrt{(|x+۲|-۱)^{۲}}$$

۲۹.ثابت کنید:

$$\sqrt[۵]{\frac{۴۰۲^{۵}+۶۰۳^{۵}+۸۰۴^{۵}}{۲۰۴^{۵}+۳۰۶^{۵}+۴۰۸^{۵}}}=\sqrt[۳]{\frac{۴۰۲^{۳}+۶۰۳^{۳}+۸۰۴^{۳}}{۲۰۴^{۳}+۳۰۶^{۳}+۴۰۸^{۳}}}$$

۳۰. حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{۱}{۴x}\left(\frac{x+\sqrt{x^{۲}-۱}}{x-\sqrt{x^{۲}-۱}}-\frac{x-\sqrt{x^{۲}-۱}}{x+\sqrt{x^{۲}-۱}}\right)$$

فصل نهم

معادله و دستگاه درجه‌ی اول

معادله‌ی درجه‌ی اول یک تساوی شامل یک متغیر است که توان متغیر آن یک باشد.

عبارات $۲x-۱=۳$ و $\frac{۲}{۳}=\frac{x-۱}{۲}$ مثال‌هایی از معادله‌ی یک‌مجهولی درجه‌ی اول می‌باشند.

مثال ۱ : معادله‌ی $۵x-۲=۳x+۴$ را حل کنید.

حل:

$$۵x-۲=۳x+۴ \Rightarrow ۵x-۳x=۴+۲ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow \boxed{x=۳}$$

مثال ۲ : معادله‌ی $۲(۳x-۱)-۳(x-۲)=۲x-۱$ را حل کنید.

حل:

$$۲(۳x-۱)-۳(x-۲)=۲x-۱ \Rightarrow ۶x-۲-۳x+۶=۲x-۱$$

$$۳x+۴=۲x-۱ \Rightarrow ۳x-۲x=-۱-۴ \Rightarrow \boxed{x=-۵}$$

مثال ۳ : معادله‌ی $۲x-\frac{x-۱}{۳}=\frac{۴x+۲}{۳}$ را حل کنید.

حل:

$$۳\times۲x-۳\times\frac{x-۱}{۳}=۳\times\frac{۴x+۲}{۳} \Rightarrow ۶x-x+۱=۴x+۲$$

$$۵x+۱=۴x+۲ \Rightarrow ۵x-۴x=۲-۱ \Rightarrow \boxed{x=۱}$$

مثال ۴ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{x-۱}{۳}-\frac{x-۲}{۴}+۱=x-۸$$

حل:

$$۱۲\times\frac{x-۱}{۳}-۱۲\times\frac{x-۲}{۴}+۱۲\times۱=۱۲(x-۸)$$

$$۴(x-۱)-۳(x-۲)+۱۲=۱۲x-۹۶$$

$$۴x-۴-۳x+۶+۱۲=۱۲x-۹۶\Rightarrow x+۱۴=۱۲x-۹۶\Rightarrow ۱۱۰=۱۱x\Rightarrow \boxed{x=۱۰}$$

مثال ۵ : معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۲-۵x=۰$

ب) $(۲x-۱)^۲=۴۹$

ج) $۹x^۲=(۲x-۱۰)^۲$

د) $(۷x-۲)^۲-(۶x-۱۱)^۲=۰$

حل:

الف) $x^۲-۵x=۰\rightarrow x(x-۵)=۰$

$$\boxed{x=۰}$$

$$x-۵=۰\rightarrow \boxed{x=۵}$$

ب) $(۲x-۱)^۲=۴۹$

$$۲x-۱=۷\Rightarrow ۲x=۸\rightarrow x=۴$$

$$۲x-۱=-۷\Rightarrow ۲x=-۶\rightarrow x=-۳$$

ج) $۹x^۲=(۲x-۱۰)^۲$

$$۳x=۲x-۱۰\Rightarrow x=-۱۰$$

$$۳x=-۲x+۱۰\Rightarrow ۵x=۱۰\Rightarrow x=۲$$

د) $(۷x-۲)^۲=(۶x-۱۱)^۲$

$$۷x-۲=۶x-۱۱\Rightarrow ۷x-۶x=-۱۱+۲\Rightarrow x=-۹$$

$$۷x-۲=-۶x+۱۱\Rightarrow ۷x+۶x=۱۱+۲\Rightarrow ۱۳x=۱۳\Rightarrow x=۱$$

مثال ۶ : معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\frac{x+1}{2x-3}-\frac{x^2+7}{4x^2-9}=\frac{2}{2x+3}-\frac{x-1}{6-4x}$$

حل:

ابتدا دامنه‌ی تعریف معادله را تعیین می‌کنیم.

$$2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \qquad 4x^2-9=0 \Rightarrow x^2=\frac{9}{4} \to x=\pm\frac{3}{2}$$

$$2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{2} \qquad 6-4x=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$D=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\}$$

$$\frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+7)}{4x^2-9}=\frac{2(6-4x)-(2x+3)(x-1)}{(2x+3)(6-4x)}$$

$$\frac{2x^2+2x+3x+3-x^2-7}{(2x-3)(2x+3)}=\frac{12-8x-2x^2+2x-3x+3}{-2(2x+3)(2x-3)}$$

$$x^2+5x-4=\frac{-2x^2-9x+15}{-2}$$

$$-2x^2-10x+8=-2x^2-9x+15$$

$$-10x+9x=15-8 \Rightarrow -x=7 \to x=-7$$

حل مسئله به کمک معادله

مثال ۷ : مجموع سه عدد فرد متوالی ۱۳۵ است. آن سه عدد کدامند؟

حل:

اگر عدد نخست را x فرض کنیم عدد دوم $x+2$ و عدد سوم $x+4$ می‌باشند.

$$x+x+2+x+4=135 \Rightarrow 3x+6=135$$

$$\Rightarrow 3x=135-6 \Rightarrow 3x=129 \Rightarrow x=43$$

$x+2=43+2=45$ و $x+4=43+4=47$

مثال ۸ : سعید ۱۰۰۰۰ ریال و سارا ۱۲۰۰۰ ریال پول دارند. سعید روزی ۲۰۰۰ ریال و سارا روزی ۱۵۰۰ ریال پس‌انداز می‌کنند. پس از چند روز پول آن‌ها مساوی می‌شود؟

حل:

$$۲۰۰۰x + ۱۰۰۰۰ = ۱۵۰۰x + ۱۲۰۰۰$$

$$۲۰۰۰x - ۱۵۰۰x = ۱۲۰۰۰ - ۱۰۰۰۰$$

$$۵۰۰x = ۲۰۰۰ \Rightarrow \boxed{x = ۴}$$

مثال ۹ : پدری ۳۸ سال و پسرش ۸ سال دارد. پس از چند سال سن پدر سه برابر سن پسر می‌شود؟

حل:

فرض می‌کنیم پس از x سال چنین شود. پس از x سال سن پدر $۳۸ + x$ و سن پسر $۸ + x$ سال می‌شود.

$$۳۸ + x = ۳(۸ + x) \Rightarrow ۳۸ + x = ۲۴ + ۳x$$

$$\Rightarrow ۳۸ - ۲۴ = ۳x - x \Rightarrow ۱۴ = ۲x \Rightarrow \boxed{x = ۷}$$

مثال ۱۰ : عددی را بر اعداد ۵، ۷ و ۸ تقسیم کرده‌ایم. باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۲، ۵ و ۷ و مجموع خارج قسمت‌ها برابر ۲۰ شده. این عدد چیست؟

نکته: $\text{خارج قسمت} = \dfrac{\text{مقسوم} - \text{باقیمانده}}{\text{مقسوم علیه}}$

حل:

$$\frac{x - ۲}{۵} + \frac{x - ۵}{۷} + \frac{x - ۷}{۸} = ۲۰$$

$$۲۸۰ \times \frac{x - ۲}{۵} + ۲۸۰ \times \frac{x - ۵}{۷} + ۲۸۰ \times \frac{x - ۷}{۸} = ۲۸۰ \times ۲۰$$

$$۵۶(x - ۲) + ۴۰(x - ۵) + ۳۵(x - ۷) = ۵۶۰۰$$

$$۵۶x - ۱۱۲ + ۴۰x - ۲۰۰ + ۳۵x - ۲۴۵ = ۵۶۰۰ \Rightarrow ۱۳۱x - ۵۵۷ = ۵۶۰۰$$

$$۱۳۱x = ۵۶۰۰ + ۵۵۷ \Rightarrow ۱۳۱x = ۶۱۵۷ \Rightarrow \boxed{x = ۴۷}$$

مثال ۱۱ : منصور می‌خواهد برای هر کدام از دوستان خود یک کتاب هدیه بخرد. اگر کتاب ۷۰۰۰ تومانی بخرد ۲۹۰۰ تومان پول کم می‌آورد و اگر کتاب ۵۰۰۰ تومانی بخرد ۷۱۰۰ تومان برایش باقی می‌ماند. منصور چه‌قدر پول دارد؟

حل:

فرض می‌کنیم تعداد دوستان منصور x باشد.

$$۷۰۰۰x - ۲۹۰۰ = ۵۰۰۰x + ۷۱۰۰$$

$$۷۰۰۰x - ۵۰۰۰x = ۷۱۰۰ + ۲۹۰۰ \Rightarrow ۲۰۰۰x = ۱۰۰۰۰ \Rightarrow x = ۵$$

کل پول منصور $۵۰۰۰ \times ۵ + ۷۱۰۰ = ۳۲۱۰۰$

مثال ۱۲ :سعید ۵ برابر مسعود پول دارد. اگر سعید ۱۵۰۰ تومان به مسعود بدهد، پولش دو برابر پول مسعود می‌شود. معین کنید هر کدام چه‌قدر پول دارند؟

حل:

پول سعید x

پول مسعود y

$$۵x - ۱۵۰۰ = ۲(x + ۱۵۰۰)$$

$$۵x - ۱۵۰۰ = ۲x + ۳۰۰۰ \Rightarrow ۵x - ۲x = ۳۰۰۰ + ۱۵۰۰$$

پول مسعود $۳x = ۴۵۰۰ \Rightarrow x = ۱۵۰۰$

پول سعید $۵ \times ۱۵۰۰ = ۷۵۰۰$

مثال ۱۳ : آزمون ورودی دبیرستان مهرآئین شامل ۱۰۰ سؤال است. در این آزمون به هر پاسخ درست ۵ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ غلط ۲ نمره‌ی منفی و به سؤالاتی که پاسخ داده نشده امتیازی تعلق نمی‌گیرد. دانش‌آموزی در آزمون ورودی این مدرسه شرکت می‌کند و به تمام سؤالات پاسخ می‌دهد و نمره‌ی او برابر ۲۷۶ می‌شود. او به چند سؤال درست پاسخ داده است؟

حل:

فرض می‌کنیم او به x سؤال پاسخ درست داده باشد، در این صورت به $۱۰۰ - x$ سؤال پاسخ غلط داده است.

$$۵x + (۱۰۰ - x) \times (-۲) = ۲۷۶$$

$$5x - 200 + 2x = 276 \Rightarrow 7x = 276 + 200$$

$$7x = 476 \Rightarrow x = 68$$

حل و بحث معادلات یک‌مجهولی درجه‌ی اول

هر معادله‌ی درجه‌ی اول یک‌مجهولی پس از ساده کردن به‌صورت $ax = b$ درمی‌آید که در آن $a \neq 0$ می‌باشد. $x = \frac{b}{a}$ جواب معادله است.

اگر $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد، معادله به‌صورت $0 \times x = b$ در می‌آید که جواب ندارد. چنین معادلاتی را معادلات **غیرممکن** می‌نامیم.

اگر $a = 0$ و $b = 0$ باشد، معادله به‌صورت $0 \times x = 0$ درمی‌آید که بیشمار جواب دارد. چنین معادلاتی را معادلات **مبهم** می‌گویند.

مثال ۱۴ : معادله‌ی $2(x-1) = 2x + 3$ را حل کنید.

حل:

$$2(x-1) = 2x + 3$$

$$2x - 2 = 2x + 3 \Rightarrow 2x - 2x = 3 + 2 \Rightarrow 0x = 5$$

این معادله غیرممکن است و جواب ندارد.

مثال ۱۵ : معادله‌ی $x + \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{2}$ را حل کنید.

حل:

$$2 \times \frac{2x+1}{2} = 2 \times x + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$2x + 1 = 2x + 1 \Rightarrow 2x - 2x = 1 - 1 \Rightarrow 0x = 0$$

این معادله مبهم است و هر عدد حقیقی در آن صدق می‌کند. لذا معادله بی‌شمار جواب دارد.

مثال ۱۶ : معادله‌ی زیر را حل و بحث کنید.

$$m^2 x - m = x + 1$$

حل:

$$m^2 x - x = m + 1 \Rightarrow (m^2 - 1)x = m + 1$$

اگر $m^{۲}-۱\neq ۰$ به عبارت دیگر m برابر ۱ یا ۱- نباشد، خواهیم داشت:

$$x=\frac{m+۱}{m^{۲}-۱}=\frac{m+۱}{(m+۱)(m-۱)}=\frac{۱}{m-۱}$$

اگر $m^{۲}-۱=۰$ دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم.

$$m=۱\Rightarrow (۱^{۲}-۱)x=۱+۱\rightarrow ۰x=۲$$

معادله غیرممکن است و جواب ندارد.

$$m=-۱\Rightarrow [(-۱)^{۲}-(-۱)]x=-۱+۱\rightarrow ۰x=۰$$

معادله مبهم هست و بیشمار جواب دارد.

مثال ۱۷ : معادله‌ی زیر را حل و بحث کنید.

$$\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=a-b$$

حل:

$$\frac{bx-ax}{ab}=a-b\Rightarrow (b-a)x=-ab(b-a)$$

اگر $b-a\neq ۰$ یا $b\neq a$ باشد، معادله یک جواب دارد. $x=\frac{-ab(b-a)}{b-a}=-ab$

اگر $b-a=۰$ یا $a=b$ باشد، معادله به‌صورت $۰\times x=۰$ درمی‌آید که مبهم است و بیشمار جواب دارد.

مثال ۱۸ : معادله‌ی زیر را حل و بحث کنید.

$$\frac{a(x-a)}{b}+\frac{b(x-b)}{a}=x \qquad (a,b>۰)$$

حل:

$$\frac{a^{۲}(x-a)+b^{۲}(x-b)}{ab}=x\Rightarrow a^{۲}x-a^{۳}+b^{۲}x-b^{۳}=abx$$

$$a^{۲}x+b^{۲}x-abx=a^{۳}+b^{۳}\Rightarrow (a^{۲}+b^{۲}-ab)x=(a+b)(a^{۲}+b^{۲}-ab)$$

با توجه به این‌که a و b مخالف صفر می‌باشند، می‌توان گفت $a^2+b^2-ab\neq 0$ زیرا:

$$a^2+b^2-ab=(a-b)^2+ab\neq 0$$

بنابراین $x=a+b$ جواب معادله است.

دستگاه معادلات درجه‌ی اول

معادله‌ی $x+y=16$ دارای بیشمار جواب است. هم‌چنین معادله‌ی $x-y=2$ نیز دارای بیشمار جواب است. اما فقط یک جفت عدد وجود دارد که در هر دو معادله $x+y=16$ و $x-y=2$ صدق می‌کند. این اعداد در واقع جواب دستگاه زیر می‌باشند.

$$\begin{cases} x+y=16 \\ x-y=12 \end{cases}$$

$$(x+y)+(x-y)=18\Rightarrow 2x=18\rightarrow x=9$$

$$9+y=16\rightarrow y=7$$

مثال ۱۹ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 7x-2y=16 \\ 5x+4y=6 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} 14x-4y=32 \\ 5x+4y=6 \end{cases}$$

$$19x=38\Rightarrow x=2$$

$$7\times 2-2y=16\Rightarrow -2y=16-14\Rightarrow -2y=2\Rightarrow y=-1$$

مثال ۲۰ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 15x+7y=8 \\ 10x+11y=-1 \end{cases}$$

حل:

با توجه به این‌که کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۱۵ و ۱۰ برابر ۳۰ می‌باشد، معادله‌ی اول را در $2=\frac{30}{15}$ و معادله‌ی دوم را در $-3=\frac{30}{-10}$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{cases} 30x + 14y = 16 \\ -30x - 33y = 3 \end{cases}$$

$$-19y = 19 \Rightarrow y = -1$$

$$15x + 7\times(-1) = 8 \Rightarrow 15x = 15 \Rightarrow x = 1$$

مثال ۲۱ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{4x - 3}{5} \\ x + 3y = \dfrac{15 - 9y}{14} \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} 5x + 5y = 4x - 3 \\ 14x + 42y = 15 - 9y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y = -3 \\ 14x + 51y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14x - 70y = 42 \\ 14x + 51y = 15 \end{cases}$$

$$-19y = 57 \Rightarrow y = -3$$

$$x + 5\times(-3) = -3 \Rightarrow x - 15 = -3 \Rightarrow x = 12$$

مثال ۲۲ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} -2x - 6y = -14 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$$

$$0 = -9$$

طرفین دو معادله را با هم جمع کردیم. مجهول‌ها از بین رفتند و تساوی حاصل یک تساوی نادرست است. بنابراین دستگاه جواب ندارد. چنین دستگاه‌هایی را **غیرممکن** می‌نامیم.

مثال ۲۳ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 4x+5y=3 \\ 8x+10y=6 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} -8x-10y=-6 \\ \underline{8x+10y=6} \end{cases}$$
$$0=0$$

طرفین دو معادله را با هم جمع کردیم. مجهول‌ها از بین رفتند ولی تساوی به‌دست آمده یک تساوی درست است. بنابراین دستگاه بیشمار جواب دارد. چنین دستگاه‌هایی را **مبهم** می‌نامیم.

مثال ۲۴ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 3x+5y-3z=34 \\ 4x-7y+z=3 \\ 2x+3y-2z=22 \end{cases}$$

حل:

از معادله‌ی درجه‌ی دوم z را برحسب x و y حساب کرده و در دو معادله‌ی دیگر جایگزین می‌کنیم تا دستگاهی دومجهولی برحسب x و y ساخته شود.

$$4x-7y+z=3 \rightarrow z=3-4x+7y$$

$$\begin{cases} 3x+5y-3(3-4x+7y)=34 \\ 2x+3y-2(3-4x+7y)=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+5y-9+12x-21y=34 \\ 2x+3y-6+8x-14y=22 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 2\times \\ -3\times \end{matrix}\begin{cases} 15x-16y=43 \\ 10x-11y=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x-32y=86 \\ \underline{-30x+33y=-84} \end{cases}$$
$$y=2$$

$$15x-32=43 \Rightarrow 15x=75 \Rightarrow x=5$$

$$z=3-4\times5+7\times2=3-20+14=-3$$

مثال ۲۵ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{۲}=\dfrac{y}{۵}=\dfrac{z}{۷} \\ ۳x-۲y-۵z=۷۸ \end{cases}$$

حل:

$$\dfrac{x}{۲}=\dfrac{y}{۵}=\dfrac{z}{۷}=k \Rightarrow \begin{cases} x=۲k \\ y=۵k \\ z=۷k \end{cases}$$

$$۳\times ۲k-۲\times ۵k-۵\times ۷k=۷۸ \Rightarrow ۶k-۱۰k-۳۵k=۷۸ \Rightarrow -۳۹k=۷۸ \Rightarrow k=-۲$$

$$x=۲\times(-۲)=-۴$$
$$y=۵\times(-۲)=-۱۰$$
$$z=۷\times(-۲)=-۱۴$$

مثال ۲۶ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{۷}{x}-\dfrac{۵}{y}=۲۵ \\ \dfrac{۳}{x}+\dfrac{۲}{y}=۱۹ \end{cases}$$

حل:

فرض می‌کنیم $A=\dfrac{۱}{x}$ و $B=\dfrac{۱}{y}$:

$$\begin{cases} ۷A-۵B=۲۵ \\ ۳A+۲B=۱۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۴A-۱۰B=۵۰ \\ \underline{۱۵A+۱۰B=۹۵} \end{cases}$$

$$۲۹A=۱۴۵ \Rightarrow A=۵$$

$$۳\times ۵+۲B=۱۹ \Rightarrow ۲B=۴ \Rightarrow B=۲$$

$$\dfrac{۱}{x}=۵ \rightarrow x=\dfrac{۱}{۵} \qquad \dfrac{۱}{y}=۲ \rightarrow y=\dfrac{۱}{۲}$$

مثال ۲۷ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}\dfrac{۱۲}{x-۳}-\dfrac{۵}{y+۲}=۶۳\\[2mm]\dfrac{۸}{x-۳}+\dfrac{۱۵}{y+۲}=-۱۳\end{cases}$$

حل:

$$\frac{۱}{x-۳}=A \qquad \frac{۱}{y+۲}=B$$

$$\begin{cases}۱۲A-۵B=۶۳\\ ۸A+۱۵B=-۱۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳۶A-۱۵B=۱۸۹\\ ۸A+۱۵B=-۱۳\end{cases}$$

$$۴۴A=۱۷۶\Rightarrow A=۴$$

$$۸\times۴+۱۵B=-۱۳\Rightarrow ۱۵B=-۴۵\Rightarrow B=-۳$$

$$\frac{۱}{x-۳}=۴\Rightarrow ۴x-۱۲=۱\rightarrow x=\frac{۱۳}{۴}$$

$$\frac{۱}{y+۲}=-۳\Rightarrow -۳y-۶=۱\rightarrow y=\frac{-۷}{۳}$$

تمرین‌های فصل نهم

۱. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۵(۲x-۳)-۲(۳x-۱)=۱۱$

ب) $\frac{۲x-۷}{۹}-\frac{x-۵}{۶}=\frac{x-۹}{۸}$

ج) $\frac{x}{x-۳}=\frac{x+۱}{x-۴}$

د) $\frac{۳x-۷}{۴x+۲}-\frac{۳x-۱۴}{۴x-۱۳}=۰$

هـ) $(۲x-۶)(x^{۲}-۲۵)=۰$

و) $(x+۲)^{۲}-x^{۲}+۴=۰$

ز) $۲۷x^{۲}(x+۳)-۱۲(x^{۲}+۳x)=۰$

ح) $(۲x+۳)(۴x-۱)=۹-۴x^{۲}$

ط) $۴x^{۲}-۱۶x+۱۵=۰$

ی) $(۴x^{۲}-۳x-۱۸)^{۲}-(۴x^{۲}+۳x)^{۲}=۰$

۲. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x-۱}{x-۲}+\frac{x}{x+۲}-\frac{x^{۲}+۲x-۴}{x^{۲}-۴}=۰$

ب) $\frac{۵}{x-۲}-\frac{۳}{۲x+۴}=\frac{۳x-۱}{x^{۲}-۴}$

ج) $\frac{۳}{۳-x}+\frac{۴}{۳+x}=\frac{۸+۳}{۹-x^{۲}}$

د) $\frac{۲x-۷}{۹}-\frac{x-۵}{۶}=\frac{x-۹}{۸}$

هـ) $\frac{۱-\frac{۵}{x+۲}}{\frac{x}{x+۲}}=۲$

و) $\frac{x-\frac{۱}{x}}{x+\frac{۱}{x}}=\frac{۳}{۵}$

ز) $\frac{۲}{x+۵}+\frac{۲۰}{x^{۲}-۲۵}=\frac{۳}{۵-x}$

ح) $\frac{۱}{x-۲}-\frac{۴}{x+۳}=\frac{۱}{۳x-۶}$

ط) $\frac{x+۱}{x-۱}-\frac{x+۲}{x+۳}+\frac{۴}{x^{۲}+۲x-۳}=۰$

ی) $\frac{۴(x+۳)}{۹}=\frac{۸x+۳۷}{۱۸}-\frac{۷x-۲۹}{۵x-۱۲}$

ک) $\frac{x+۵}{x+۴}-\frac{x-۶}{x-۷}=\frac{x-۴}{x-۵}-\frac{x-۱۵}{x-۱۶}$

ل) $\frac{x+۲}{x}+\frac{x-۷}{x-۵}-\frac{x+۳}{x+۱}=\frac{x-۶}{x-۴}$

۳. مجموع نصف و ثلث و ربع عددی ۱۳ است. آن عدد چیست؟

۴. علی پنج برابر رضا پول دارد. اگر علی ۱۰۰ ریال به رضا بدهد، پول او دو برابر پول رضا می‌شود. هر کدام چه‌قدر پول دارند؟

۵. در یک مزرعه تعدادی گوسفند و مرغ وجود دارد. اگر تعداد سرها را بشماریم جمعاً ۲۵ سر می‌بینیم. اگر تعداد پاها را بشماریم جمعاً ۸۶ پا می‌بینیم. تعداد مرغها و تعداد گوسفندان را حساب کنید.

۶. از ایستگاهی یک قطار باری حرکت می‌کند. دو ساعت و نیم بعد قطار مسافربری در همان مسیر با سرعت ۱۰ کیلومتر بیش‌تر از سرعت قطار باری راه می‌افتد و بعد از ۱۵ ساعت به اندازه‌ی ۲۵ کیلومتر از آن جلو می‌افتد. سرعت قطار باری چند کیلومتر بر ساعت است؟

۷. حسین می‌خواهد از پس‌انداز خود هر روز نصف آن‌را به اضافه‌ی ۲۰ ریال خرج کند. اگر بعد از سه روز پس‌انداز او تمام شود، تعیین کنید پس‌انداز او چه‌قدر بوده است؟

۸. سن پدری ۴۶ سال و سن فرزندش ۸ سال است. پس از چند سال سن پدر سه برابر سن فرزندش می‌شود؟

۹. شخصی می‌خواهد فاصله‌ی دو شهر A و B را با سرعت ۴ کیلومتر بر ساعت بپیماید. یک ساعت پس از حرکت او کالسکه‌ای با سرعت ۱۲ کیلومتر بر ساعت از A به‌طرف B حرکت می‌کند و چون به شخص می‌رسد او را سوار می‌کند و مسافت آن نقطه تا شهر B را در دو ساعت طی می‌کند. فاصله‌ی دو شهر A و B چه‌قدر است؟

۱۰. پنج برابر پول منصور همان‌قدر از ۱۵۰۰ تومان بیش‌تر است که از ۴۵۰۰ تومان کم‌تر، پول منصور چه‌قدر است؟

۱۱. پول سعید از دو برابر پول نادر ۵ تومان بیش‌تر است. پول کامران سه برابر مجموع پول سعید و نادر می‌باشد. اگر سه نفری روی هم ۱۵۶۲۰ تومان پول داشته باشند، پول هر کدام چه‌قدر است؟

۱۲. دانش‌آموزی در یک امتحان تستی که شامل ۱۰۰ سؤال است، شرکت می‌کند. مقررات آزمون چنین است که به هر سؤال درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر سؤال غلط یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد و برای سوالاتی که پاسخ داده نشده هیچ امتیازی منظور نمی‌شود. اگر این دانش‌آموز به تمام سؤالات پاسخ داده و نمره‌ی آزمون او ۲۵۲ شده باشد، چند سؤال را درست و چند سوال را غلط جواب داده است؟

۱۳. در کلاسی اگر قرار باشد روی هر نیمکت چهار نفر بنشینند ۲ نیمکت خالی می‌ماند و اگر روی هر نیمکت ۳ نفر بنشینند ۴ نفر بدون جا می‌مانند. تعداد دانش‌آموزان کلاس چند نفرند؟

۱۴. مجتبی مجموعاً ۹۰ سکه به ارزش ۱۳۵۰ ریال از سکه‌های ۵ ریالی و ۵ تومانی دارد. او از هر سکه چندتا دارد؟

۱۵. یک لوله‌ی آب ۲ ساعت دیرتر و لوله‌ی آب دیگر ۴/۵ ساعت دیرتر از موقعی که هر دو لوله باز باشند، استخری را پر از آب می‌کنند. هریک از دو لوله به تنهایی در چند ساعت استخر را پر می‌کنند؟

۱۶. معادلات پارامتری زیر را حل و بحث کنید.

الف) $(m^2-1)x = m^2+3m+2$

ب) $m^2x = m(x+2)-2$

ج) $m^2(x-2)-3m = x+1$

د) $x - \dfrac{2}{m^3} = \dfrac{1}{m^2}(4x+1)$

هـ) $a^2x+4 = a(x+2)+b$

و) $(x-a)(2x-b)^2-(x-b)(2x-a)^2 = 0$

ز) $\dfrac{x+a}{a} - \dfrac{x-2a}{a} = 3$

ح) $\dfrac{x+a-b}{a} - \dfrac{x+b-a}{b} = \dfrac{b^2-a^2}{ab}$

ط) $\dfrac{x+1}{1-x} = \dfrac{a+b+1}{a+b-1}$

ی) $\dfrac{a}{x-a} - \dfrac{b}{x-b} = \dfrac{a-b}{x+a-b}$

۱۷. دستگاه‌های زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} 6y-5x = 18 \\ 12x-9y = 0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 39x-8y = 99 \\ 52x-15y = 80 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} 3x = 7y \\ 12y = 5x-1 \end{cases}$

د) $\begin{cases} 8x = 5y \\ 13x = 8y+1 \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} 3(x+y) = 1-y \\ 5x+2y = 3-4x-10y \end{cases}$

و) $\begin{cases} 3x-2y = 9+x+3y \\ 7x+4y-10 = 0 \end{cases}$

ز) $\begin{cases} \frac{۱-x-y}{۲}=\frac{x-y-۲}{۳} \\ \frac{x}{۲}-\frac{y}{۳}=\frac{x}{۳}-\frac{y}{۲}+۱ \end{cases}$

ح) $\begin{cases} \frac{x+y}{۸}+\frac{x-y}{۶}=۵ \\ \frac{x+y}{۴}-\frac{y-x}{۲}=۱۰ \end{cases}$

ط) $\begin{cases} ۳x\sqrt{۲}+۲y=۸ \\ x\sqrt{۲}-y=۱ \end{cases}$

ی) $\begin{cases} ۵x\sqrt{۵}-۷y\sqrt{۳}=۲۹ \\ \frac{x}{\sqrt{۵}}-\frac{y}{\sqrt{۳}}=۱ \end{cases}$

۱۸.دستگاه‌های زیر را حل کنید:

الف) $\begin{cases} \frac{۳}{x}+\frac{۵}{y}=\frac{۸}{۱۵} \\ ۹y-۲۲x=\frac{۳xy}{۲۵} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \frac{۱}{۴x}+\frac{۱}{۳y}=۲ \\ \frac{۱}{y}-\frac{۱}{۲x}=۱ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} \frac{۴}{x+y-۱}-\frac{۵}{۲x-y+۳}+\frac{۵}{۲}=۰ \\ \frac{۴}{x+y-۱}+\frac{۱}{۲x-y+۳}+\frac{۷}{۵}=۰ \end{cases}$

د) $\begin{cases} \frac{۲}{۳x+y-۲}+\frac{۳}{x+۴y+۱}+\frac{۷}{۲۴}=۰ \\ \frac{۱}{۳x+y-۲}+\frac{۲}{x+۴y+۱}+\frac{۷}{۱۲}=۰ \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} ۳\sqrt{۴x+۲y}-۵\sqrt{۲x-y}=۲ \\ ۷\sqrt{۴x+۲y}+۲\sqrt{۲x-y}=۳۲ \end{cases}$

و) $\begin{cases} \frac{x-۲}{۵}=\frac{y+۱}{۳}=\frac{z-۳}{۴} \\ ۳x-۲y+۷z=۲۵۱ \end{cases}$

ز) $\begin{cases} \frac{۴}{۲x-۱}+\frac{۳}{۶y+۴}=۲۱ \\ \frac{۵}{۶x-۳}-\frac{۲}{۱۵y+۱۰}=۱۹ \end{cases}$

۱۹. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{۸}{۳} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{۸}{۵} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{۴}{۳} \end{cases}$$

۲۰. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x + y + z = ۱ \\ x + ۲y + ۴z = ۸ \\ x + ۳y + ۹z = ۲۷ \end{cases}$$

۲۱. مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۰ است. اگر جای ارقام این عدد را برعکس کنیم ۳۶ واحد به آن افزوده می‌شود. آن عدد چیست؟

۲۲. مبلغی را می‌خواستند بین عده‌ای تقسیم کنند. به هر نفر ۱۰۰۰ ریال می‌رسید. در موقع تقسیم ۲ نفر از این عده کم شدند و در نتیجه به هریک ۱۲۰۰ ریال رسید. مبلغ و تعداد افراد را تعیین کنید.

۲۳. برای تشکیل شرکتی قرار شد ۱۵ نفر مشترکاً ۱۲۰۰۰ تومان بپردازند. چند نفر از شراکت خودداری کردند و سایرین هر کدام ۴۰۰ تومان بیش‌تر پرداختند تا سرمایه‌ی شرکت تأمین شد. تعداد شرکاء را تعیین کنید.

۲۴. دانش‌آموزی با پدرش قرار گذاشت که در هر امتحان که نمره‌ی خوب بگیرد ۸۰۰۰ ریال از پدرش بگیرد و در هر امتحان که نمره‌ی بد بگیرد ۵۰۰۰ ریال جریمه بدهد. بعد از گذراندن ۸ امتحان او ۳۸۰۰۰ ریال پول داشت. معین کنید او در چند امتحان نمره‌ی خوب و در چند امتحان نمره‌ی بد گرفته است؟

۲۵. امیر از فرید پرسید چند سال داری؟ او گفت وقتی تو به سن امروز من برسی من دو برابر سن امروز تو سن خواهم داشت. اگر مجموع سن امیر و فرید ۳۰ سال باشد، سن هر کدام چه‌قدر است؟

۲۶.عدد سه رقمی را پیدا کنید که رقم دهگان آن صفر و مجموع ارقام آن ۱۱ باشد و اگر جای ارقام آن را عوض کنیم عدد حاصل ۴۹۵ واحد از عدد نخست بیش‌تر شود.

۲۷. شخصی با ۱۸۶۲ تومان مقداری سیب و پرتقال خرید. قیمت هر سه پرتقال ۲ تومان و قیمت هر ۱۲ سیب ۵ تومان است. اگر تعداد پرتقال‌هایی که خریده ۵ برابر تعداد فعلی و تعداد سیب‌ها $\frac{۱}{۴}$ تعداد فعلی می‌بود ۵۷۰۰ تومان می‌پرداخت. تعداد سیب‌ها و پرتقال‌ها چند تا است؟

۲۸. چند دروگر باید دو مزرعه را درو کنند. آن‌ها از صبح روی مزرعه‌ی بزرگ‌تر شروع به کارکردند. بعد از نصف روز کار به ۲ قسمت شدند. $\frac{۲}{۳}$ دروگران روی مزرعه‌ی اول باقی ماندند و آن‌را تا عصر به آخر رساندند و بقیه مشغول درو مزرعه‌ی دوم که ثلث مزرعه‌ی اول بود شدند. اگر بدانیم در جریان روز بعد تنها ۴ دروگر برای اتمام کار در مزرعه‌ی دوم کافی باشد، تعداد دروگرها را حساب کنید.

۲۹.در دستگاه دهدهی اگر از نماد دو رقمی عددی ۱۸ واحد کم کنیم، جای ارقام عدد عوض می‌شود. چنان‌چه رقم یکان عدد ۳ واحد از دو برابر رقم دهگان آن کم‌تر باشد، آن عدد چیست؟

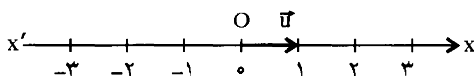
۳۰.لاستیک جلوی اتومبیلی بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک عقب آن پس از ۱۵۰۰۰ کیلومتر سائیده می‌شوند. بعد از چند کیلومتر حرکت جای لاستیک جلو و عقب را عوض کنیم تا با هم در یک زمان سائیده شوند؟

فصل دهم

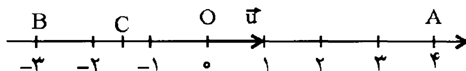
معادله‌ی خط

محور

محور خطی است جهت‌دار که روی آن یک نقطه به عنوان مبدأ درنظر می‌گیریم. جهت از چپ به راست را جهت مثبت و خلاف آن را جهت منفی اختیار می‌کنیم. برای هر محور یک واحد اندازه‌گیری انتخاب می‌کنیم که بردار یکانی (بردار واحد) محور نامیده می‌شود. **بردار یکانی برداری است هم‌جهت با جهت مثبت محور و اندازه‌ی آن یک واحد محور می‌باشد.** در شکل زیر بردار u بردار یکانی محور می‌باشد.



مثال ۱ :در شکل زیر بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ را برحسب $\vec{u}$ بنویسید.



حل:

$$\overrightarrow{OA} = ۴\vec{u} \qquad \overrightarrow{OB} = -۳\vec{u} \qquad \overrightarrow{OC} = -\frac{۳}{۲}\vec{u}$$

در این مثال طول نقطه‌ی A برابر ۴،طول نقطه‌ی B برابر ۳- و طول نقطه‌ی C برابر $-\frac{۳}{۲}$ است.

$$x_A = ۴ \qquad x_B = -۳ \qquad x_C = -\frac{۳}{۲}$$

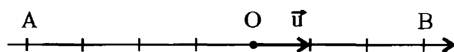
به‌طور کلی اگر $\overrightarrow{OA} = m\vec{u}$ باشد، آن‌گاه: $x_A = m$

☆ اندازه‌ی جبری یک بردار

اگر O مبدأ محور و A نقطه‌ی دلخواهی روی محور باشد و $\overrightarrow{OA}=m\vec{u}$ آن‌گاه اندازه‌ی جبری $\overrightarrow{OA}$ که آن‌را به‌صورت $\overline{OA}$ نشان می‌دهیم برابر m می‌باشد. بدیهی است اندازه‌ی جبری بردار OA با طول نقطه‌ی A مساوی است. $\overline{OA}=x_A$

طول بردار OA را نیز به‌صورت $|\overrightarrow{OA}|$ نشان می‌دهیم. $|\overrightarrow{OA}|=|m|$

مثال ۲ : در شکل زیر اندازه‌ی جبری بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ را مشخص کنید.



حل:

$$\overrightarrow{AB}=7\vec{u}\Rightarrow\overline{AB}=7$$

$$\overrightarrow{BA}=-7\vec{u}\Rightarrow\overline{BA}=-7$$

نکته: به‌طور کلی $\overline{AB}=-\overline{BA}$

مثال ۳ : در شکل زیر ثابت کنید: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$



حل:

فرض می‌کنیم $\overrightarrow{AB}=m\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=n\vec{u}$. بنابراین $\overline{AB}=m$ و $\overline{BC}=n$.

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=m\vec{u}+n\vec{u}=(m+n)\vec{u}\Rightarrow\overline{AC}=m+n$$

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$$

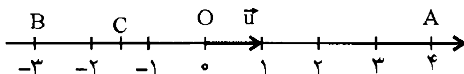
رابطه‌ی شال: به‌طور کلی برای هر سه نقطه‌ی واقع بر یک محور رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

قضیه: اندازه‌ی جبری هر بردار واقع بر یک محور برابر است با:

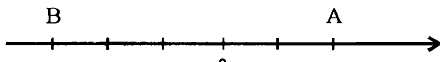
طول انتها − طول ابتدا

برهان: دو نقطه‌ی A و B را روی محور $x'Ox$ درنظر می‌گیریم:



بر اساس رابطه‌ی شال داریم: $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB} \Rightarrow \overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=x_B-x_A$

مثال ۴ : در شکل زیر $x_A=+۲$ و $x_B=-۳$. اندازه‌ی جبری $\overline{AB}$ و $\overline{BA}$ را به‌دست آورید.



حل:

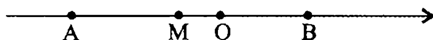
$$\overline{AB}=x_B-x_A=-۳-(+۲)=-۵$$
$$\overline{BA}=x_A-x_B=۲-(-۳)=+۵$$

مثال ۵ : اگر $x_A=-۱$ و $x_B=۲$ و $x_C=-۲$ و $\overline{AB}=۲\overline{CD}$ باشد x_D چه‌قدر است؟

حل:

$$\overline{AB}=۲\overline{CD} \Rightarrow x_B-x_A=۲(x_D-x_C)$$
$$\Rightarrow ۲-(-۱)=۲[x_D-(-۲)] \Rightarrow ۳=۲x_D+۴ \Rightarrow x_D=-\frac{۱}{۲}$$

مثال ۶ : در شکل زیر M وسط AB است. ثابت کنید $x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$.



حل:

$$\overline{AM}=\overline{MB} \Rightarrow x_M-x_A=x_B-x_M$$
$$۲x_M=x_A+x_B \Rightarrow x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

مثال ۷ : در شکل زیر نقاط M و N پاره‌خط AB را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. اگر $x_A=a$ و $x_B=b$ و $x_M=m$ باشند، ثابت کنید:

$$m=\frac{۲a+b}{۳}$$



حل:

$$\overline{AB} = ۳\overline{AM}$$

$$b - a = ۳(m - a) \Rightarrow b - a = ۳m - ۳a$$

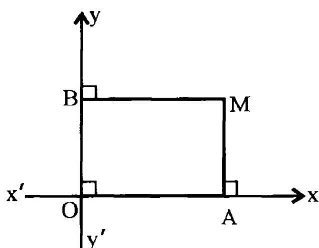
$$b - a + ۳a = ۳m$$

$$۲a + b = ۳m$$

$$m = \frac{۲a + b}{۳}$$

نکته: اگر نقطه‌ی A به‌طول a و نقطـه‌ی B بـه طـول b روی یـک محـور باشـند، آن‌گـاه فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B برابر است با: $|a - b|$

☆ دستگاه مختصات دکارتی



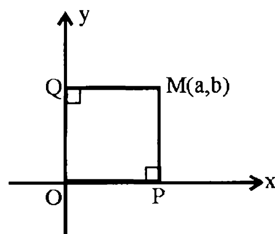
در یک صفحه دو محـور $x'Ox$ و $y'Oy$ را عمـود بر هم رسم کرده، نقطه‌ی O فصل مشترک آن‌ها را مبـدأ مـشترک دو محـور اختیـار مـی‌کنـیم. محـور $x'Ox$ را محـور طـول و محـور $y'Oy$ را محور عرض می‌نامیم. شکلی را که بـه ایـن ترتیـب سـاخته مـی‌شـود دسـتگاه مختـصات دکـارتی می‌گویند.

نقطه‌ی M را در صـفحه‌ی مختـصات درنظـر گرفتـه و از آن نقطـه‌ی عمودهـای MA و MB را به‌ترتیب بر محور $x'Ox$ و $y'Oy$ رسم می‌کنیم.

اندازه‌ی جبری بردار $\overrightarrow{OA}$ را طول نقطه‌ی M و اندازه‌ی جبری بردار $\overrightarrow{OB}$ را عـرض نقطـه‌ی M می‌نامند. طول نقطه‌ی M را با x_M و عرض آن‌را با y_M نشان می‌دهند.

نقطه‌ی M به‌طول a و به عرض b را بـه‌صـورت $M\ (a,b)$ نـشان مـی‌دهنـد کـه آن‌را M بـه مختصات a و b می‌خوانیم.

هر نقطه را که مختصات آن معلوم باشد، می‌توان در صفحه‌ی مختَصات پیدا کرد.



اگر $M\ (a,b)$ نقطه‌ای دلخواه باشد، برای نشان دادن نقطه‌ی M کافی است نقطه‌ی P را به‌طول $\overline{OP}=a$ روی محور طول و نقطه‌ی Q را به عرض $\overline{OQ}=b$ روی محور عرض معین کرده و از نقاط P و Q دو عمود به ترتیب بر محور طول و محور عرض رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در نقطه‌ای قطع کنند. این نقطه‌ی تقاطع همان نقطه‌ی $M\ (a,b)$ می‌باشد.

به این ترتیب هر نقطه‌ی صفحه‌ی مختصات با یک جفت عدد حقیقی متناظر است و هر جفت عدد حقیقی را می‌توان با نقطه‌ای از صفحه‌ی مختصات متناظر دانست. در این صورت بین مجموعه‌ی نقاط واقع در صفحه‌ی مختصات و مجموعه‌ی جفت‌های مرتب از اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک وجود دارد.

نکته: دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه‌ی مختصات را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند. در ناحیه‌ی اول طول و عرض مثبت در ناحیه‌ی دوم طول منفی و عرض مثبت و در ناحیه‌ی سوم طول و عرض منفی و در ناحیه‌ی چهارم طول مثبت و عرض منفی است. هم‌چنین هر نقطه واقع بر محور طول عرضش صفر و هر نقطه‌ی واقع بر محور عرض، طولش صفر است.

☆ فاصله‌ی دو نقطه برحسب مختصات آن‌ها

دو نقطه‌ی $A\ (x_1, y_1)$ و $B\ (x_2, y_2)$ را در صفحه‌ی مختصات xOy درنظر بگیرید. می‌خواهیم فاصله‌ی این دو نقطه یعنی طول پاره‌خط AB را برحسب مختصات A و B به‌دست آوریم.

از نقاط A و B خطوطی بر هر دو محور عمود می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\overline{HB}=\overline{MN}=\overline{ON}-\overline{OM}=x_2-x_1$$
$$\overline{HA}=\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=y_1-y_2$$

بنابر قضیه‌ی فیثاغورس:

$$AB^{۲} = HB^{۲} + HA^{۲} = (x_{۱} - x_{۲})^{۲} + (y_{۱} - y_{۲})^{۲}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_{۱} - x_{۲})^{۲} + (y_{۱} - y_{۲})^{۲}}}$$

نکته: فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقطه‌ی $M\ (a,b)$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

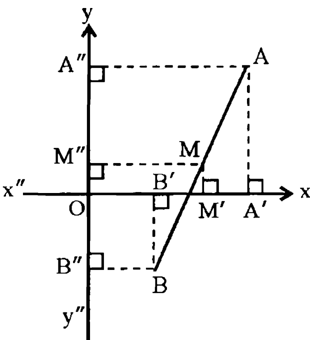
$$\boxed{OM = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}}$$

مثال ۸ : فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A\ (۵,-۳)$ و $B\ (۲,۱)$ را حساب کنید.

حل:

$$AB = \sqrt{(۵-۲)^{۲} + (-۳-۱)^{۲}} = \sqrt{۳^{۲} + (-۴)^{۲}} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

☆ مختصات وسط یک پاره‌خط برحسب مختصات دو سر آن



دو نقطه‌ی $A\ (x_{۱}, y_{۱})$ و $B\ (x_{۲}, y_{۲})$ را در صفحه‌ی مختصات درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB را برحسب مختصات A و B به‌دست آوریم.

برای این منظور از نقاط A و B و M خطوطی بر دو محور عمود می‌کنیم تا به ترتیب محور طول را در نقاط A' و B' و M' و محور عرض را در نقاط A'' و B'' و M'' قطع کنند.

نقطه‌ی M' وسط پاره‌خط $A'B'$ است. بنابراین:

$$\overline{B'M'} = \overline{M'A'} \Rightarrow \overline{OM'} - \overline{OB'} = \overline{OA'} - \overline{OM'} \Rightarrow ۲\overline{OM'} = \overline{OA'} + \overline{OB'}$$

$$\Rightarrow \overline{OM'} = \frac{\overline{OA'} + \overline{OB'}}{۲} \Rightarrow x_{M'} = \frac{x_{A'} + x_{B'}}{۲} \Rightarrow \boxed{x_M = \frac{x_{۱} + x_{۲}}{۲}}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$\boxed{y_M = \frac{y_{۱} + y_{۲}}{۲}}$$

مثال ۹ : اگر $A\ (۱,-۴)$ و $B\ (-۵,-۲)$ دو سر یک پاره‌خط باشند مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB چیست؟

حل:

$$x_M = \frac{۱+(-۵)}{۲} = \frac{-۴}{۲} = -۲$$

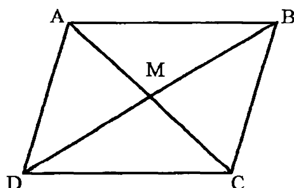
$$y_M = \frac{-۴+(-۲)}{۲} = \frac{-۶}{۲} = -۳$$

$$\Rightarrow M\ (-۲,-۳)$$

مثال ۱۰ : در یک دستگاه محورهای مختصات دکارتی اگر چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد، ثابت کنید:

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$
$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

حل:



$$x_M = \frac{x_A + x_C}{۲} = \frac{x_B + x_D}{۲}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_A + x_C = x_B + x_D}$$

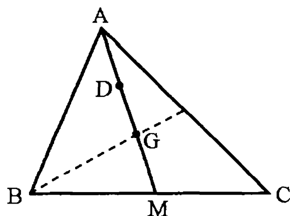
$$y_M = \frac{y_A + y_C}{۲} = \frac{y_B + y_D}{۲}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_A + y_C = y_B + y_D}$$

مثال ۱۱ : اگر G نقطه‌ی تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{۳} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{۳}$$

حل:



می‌دانیم نقطه‌ی برخورد میانه‌ها هر میانه را به نسبت ۲ و ۱ تقسیم می‌کند. $\frac{AG}{GM} = \frac{۲}{۱}$. فرض می‌کنیم D وسط AG باشد.

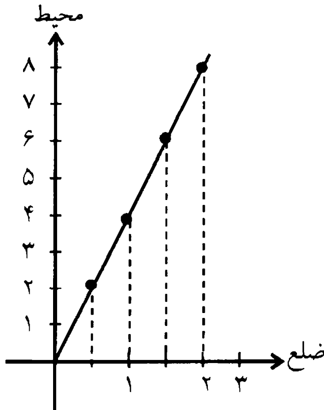
$$x_G = \frac{x_D + x_M}{۲} = \frac{\frac{x_A + x_G}{۲} + \frac{x_B + x_C}{۲}}{۲}$$

$$= \frac{x_A + x_G + x_B + x_C}{۴} \Rightarrow ۴x_G = x_A + x_G + x_B + x_C$$

$$=x_A+x_B+x_C \Rightarrow \boxed{x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳}}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود: $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}$

رابطه‌های خطی

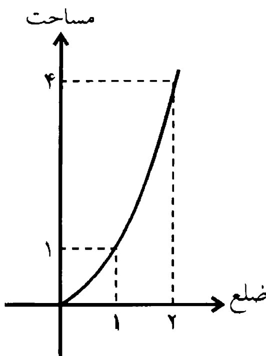


پدیده‌های مختلفی در طبیعت با هم ارتباط دارند. مسافتی که یک خودرو طی می‌کند با بنزینی که مصرف می‌کند رابطه‌ی مستقیم دارد. توان جسمی افراد با تغذیه‌ی آن‌ها رابطه دارد. محیط یک مربع با ضلع آن رابطه‌ی مستقیم دارد. جدول زیر را که رابطه‌ی بین ضلع و محیط یک مربع را نشان می‌دهد درنظر بگیرید و نمودار هندسی آن‌را رسم کنید.

ضلع مربع	۰/۵	۱	۱/۵	۲	...	x
محیط مربع	۲	۴	۶	۸	...	۴x

اگر نقاط $\begin{bmatrix}۰/۵\\ ۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۱\\ ۴\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۱/۵\\ ۶\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۲\\ ۸\end{bmatrix}$ را به هم وصل کنیم ملاحظه می‌کنیم روی یک خط راست قرار می‌گیرند.

نسبت محیط یک مربع به ضلع آن عدد ثابت ۴ می‌باشد. اگر x ضلع مربع و y محیط آن باشد، بدیهی است که $\frac{y}{x}=۴$ یا $y=۴x$.



یعنی رابطه‌ی بین محیط یک مربع و ضلع آن یک رابطه‌ی درجه‌ی اول برحسب x و y و نمودار هندسی آن یک خط راست است. چنین رابطه‌ای را یک **رابطه‌ی خطی** می‌نامیم.

اگر ضلع مربع را x و مساحت آن‌را y فرض می‌کنیم رابطه‌ی آن‌ها به‌صورت $y=x^۲$ می‌باشد که یک رابطه‌ی خطی نیست. نمودار هندسی رابطه‌ی $y=x^۲$ به‌صورت یک منحنی می‌باشد.

☆ شیب یک خط

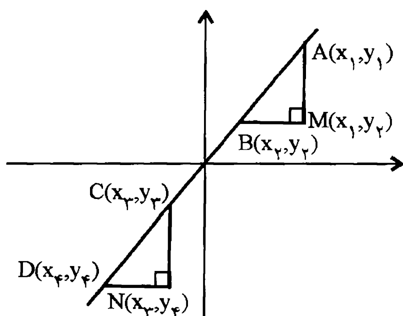
دو نقطه‌ی A و B را روی یک خط درنظر بگیرید. اگر از نقطه‌ی A روی خط تا نقطه‌ی B حرکت کنیم نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی شده را شیب خط می‌نامیم. $\text{شیب} = \dfrac{HB}{AH}$

اگر $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه:

$$\overline{AH} = x_B - x_A \quad \text{و} \quad \overline{HB} = y_B - y_A$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

به‌طور کلی شیب یک خط عبارت است از نسبت تغییرات عرض‌های دو نقطه‌ی دلخواه آن به تغییرات طول‌های متناظر آن‌ها. این نسبت همواره مقدار ثابتی است. زیرا:

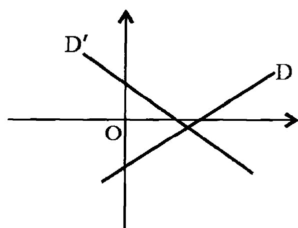


$$\overset{\Delta}{AMB} \sim \overset{\Delta}{CND} \Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{DN}}$$

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{DN}}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = m$$

نکته: خط‌هایی که با افزایش طول نقاط روی آن‌ها عرض نقاط نیز اضافه شود شیبشان مثبت است و خط‌هایی که با افزایش طول نقاط روی آن‌ها عرض نقاط کاهش می‌یابد دارای شیب منفی می‌باشند. در شکل مقابل شیب خط D مثبت و شیب خط D' منفی است.

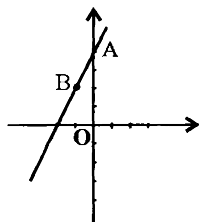


☆ معادله‌ی خط

اگر مقادیر دو متغیر رابطه‌ی خطی داشته باشند و آن‌ها را x و y فرض کنیم نمودار هندسی رابطه یک خط راست است. معادله‌ای که رابطه‌ی بین x و y را بیان می‌کند معادله‌ی خط نامیده می‌شود. به عبارت دیگر معادله‌ی خط رابطه‌ای است بین طول و عرض نقاط تشکیل‌دهنده‌ی خط. صورت استاندارد معادله‌ی خط به‌صورت $y = mx + d$ می‌باشد.

مثال ۱۲ : نمودار هندسی خطی به معادله‌ی $y = ۲x + ۴$ را رسم کنید.

حل:



برای رسم یک خط کافی است دو نقطه از خط را پیدا کرده و آن‌ها را به هم وصل کنیم:

$x = ۰ \Rightarrow y = ۲\times۰ + ۴ = ۴$ $\qquad$ $A\,(۰,۴)$

$x = -۱ \Rightarrow y = ۲\times(-۱) + ۴ = ۲$ $\qquad$ $B\,(-۱,۲)$

خط در نقطه‌ی $A\,(۰,۴)$ محور عرض را قطع کرده است. عدد ۴ را عرض از مبدأ خط می‌نامند. اگر بخواهیم نقطه‌ی برخورد خط را با محور طول حساب کنیم، کافی است به‌جای y در معادله‌ی خط صفر قرار دهیم.

$y = ۰ \Rightarrow ۰ = ۲x + ۴ \Rightarrow -۴ = ۲x \rightarrow x = -۲$

خط در نقطه‌ی $(-۲,۰)$ محور طول را قطع کرده که عدد ۲- را طول از مبدأخط می‌نامند.

به‌طور کلی عرض نقطه‌ی برخورد یک خط با محور عرض را عرض از مبدأ خط و طول نقطه‌ی برخورد یک خط با محور طول را طول از مبدأ خط می‌نامند.

مثال ۱۳ : طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط $y = ۳x - ۶$ را پیدا کنید.

حل:

$x = ۰ \Rightarrow y = ۳\times۰ - ۶ = -۶$ $\quad$ عرض از مبدأ

$y = ۰ \Rightarrow ۰ = ۳x - ۶ \Rightarrow ۶ = ۳x \rightarrow x = ۲$ $\quad$ طول از مبدأ

مثال ۱۴ : نشان دهید شیب خطی به معادله‌ی $y = mx + d$ برابر m است.

حل:

فرض می‌کنیم $A\ (x_۱ , y_۱)$ و $B\ (x_۲ , y_۲)$ دو نقطه از خط باشند.

$$\text{شیب خط} = \frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲} = \frac{(mx_۱ + d) - (mx_۲ + d)}{x_۱ - x_۲} = \frac{mx_۱ + d - mx_۲ - d}{x_۱ - x_۲}$$

$$= \frac{m(x_۱ - x_۲)}{x_۱ - x_۲} = m$$

مثال ۱۵ :معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۷ بوده و محور عـرض را در نقطـه‌ی $A\ (۰,۴)$ قطع کند.

حل:

عرض از مبدأ خط ۴ است. بنابراین معادله‌ی خط به‌صورت $y = ۷x + ۴$ می‌باشد.

مثال ۱۶ : معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن برابر ۳ و طول از مبدأ آن برابر ۲ باشد.

حل:

فرض می‌کنیم معادله‌ی خط به‌صورت $y = mx + d$ باشد. با توجه به این‌که شیب خط برابـر ۳ است، پس معادله‌ی خط به‌صورت $y = ۳x + d$ در می‌آید. با توجه به این‌که طول از مبـدأ خط برابر ۲ می‌باشد، پس خط از نقطه‌ی (۲,۰) می‌گذرد. $y = ۳x + d$

$$۰ = ۳ \times ۲ + d \Rightarrow ۰ = ۶ + d \Rightarrow d = -۶$$

$$y = ۳x - ۶$$

معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A\ (x_۱ , y_۱)$ می‌گذرد و شیب آن برابر m است

فرض می‌کنیم معادله‌ی خط به‌صورت $y = mx + d$ باشد. با توجه به این‌که این خط بایـد از نقطه‌ی A بگذرد، مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی خط صدق می‌کند.

$$y_۱ = mx_۱ + d \Rightarrow d = y_۱ - mx_۱$$

$$y = mx + y_۱ - mx_۱ \Rightarrow \boxed{y - y_۱ = m\ (x - x_۱)}$$

مثال ۱۷ :معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A\ (۲,-۳)$ بگذرد و شیب آن ۵ باشد.

حل:

$$y - y_۱ = m\ (x - x_۱)$$

$$y + ۳ = ۵(x - ۲) \rightarrow y + ۳ = ۵x - ۱۰ \rightarrow y = ۵x - ۱۳$$

مثال ۱۸ : معادله‌ی خطی را بنویسید که محور طول را در نقطه‌ای به‌طول ۳- قطع کنـد و شـیب آن $\frac{۲}{۳}$ باشد.

حل:

در واقع خط از نقطه‌ی $(-۳,۰)$ می‌گذرد.

$$y - ۰ = \frac{۲}{۳}(x + ۳) \rightarrow y = \frac{۲}{۳}x + ۲$$

مثال ۱۹ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A\ (۴,-۱)$ بگذرد و موازی محور طول باشد.

حل:

شیب خطی که موازی محور طول است صفر می‌باشد.

$$y + ۱ = ۰(x - ۴) \rightarrow y + ۱ = ۰ \rightarrow y = -۱$$

مثال ۲۰ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A\ (۴,-۱)$ بگذرد و موازی محور عرض باشد.

حل:

خطی که موازی محور عرض است معادله‌اش به‌صورت $x = h$ است که h طول مشترک کلیه‌ی نقاط تشکیل‌دهنده‌ی خط می‌باشد. بنابراین معادله‌ی خطی که از A موازی محور عرض رسم می‌شود $x = ۴$ است.

معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A\ (x_۱, y_۱)$ و $B\ (x_۲, y_۲)$ می‌گذرد

برای نوشتن معادله‌ی خط سه حالت زیر را درنظر می‌گیریم.

۱) $x_۱ = x_۲$

در این حالت خط موازی محور yها و معادله‌ی آن به‌صورت $x = x_۱$ است.

۲) $y_۱ = y_۲$

در این حالت خط موازی محور xها و معادله‌ی آن به‌صورت $y = y_۱$ است.

۳) $x_۱ \neq x_۲$ و $y_۱ \neq y_۲$

در این حالت شیب خط برابر $\frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲}$ می‌باشد و معادله‌ی خط به‌صورت زیر است.

$$\boxed{y - y_۱ = \frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲}(x - x_۱)}$$

این معادله را به‌صورت زیر نیز می‌نویسند.

$$\frac{y - y_۱}{x - x_۱} = \frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲}$$

مثال ۲۱ : **معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A\,(۲,۵)$ و $B\,(۲,-۳)$ بگذرد.**

حل: $x = ۲$

مثال ۲۲ : **معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A\,(۱,-۴)$ و $B\,(-۱,-۴)$ بگذرد.**

حل: $y = -۴$

مثال ۲۳ : **معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A\,(۳,۵)$ و $B\,(۲,-۱)$ بگذرد.**

حل:

$$m_{AB} = \frac{۵-(-۱)}{۳-۲} = ۶$$

$$AB : y - ۵ = ۶(x - ۳) \to y = ۶x - ۱۳$$

مثال ۲۴ : **معادله‌ی خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن ۶ و عرض از مبدأ آن ۳- باشد.**

حل:

فرض می‌کنیم معادله‌ی خط به صورت $y = mx - ۳$ باشد. طول از مبدأ خط ۶ است. پس خط از نقطه‌ی $(۶,۰)$ می‌گذرد.

$$۰ = ۶m - ۳ \to ۳ = ۶m \to m = \frac{۱}{۲}$$

$$y = \frac{۱}{۲}x - ۳$$

مثال ۲۵ : **نشان دهید معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A\,(P\,,۰)$ و $B\,(۰,q\,)$ می‌گذرد به‌صورت $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = ۱$ می‌باشد.**

حل:

$$m_{AB} = \frac{۰-q}{p-۰} = -\frac{q}{p}$$

$$y - ۰ = -\frac{q}{p}(x - p) \to y = -\frac{q}{p}x + q$$

$$\to y + \frac{q}{p}x = q \Rightarrow \boxed{\frac{y}{q} + \frac{x}{p} = ۱}$$

مثال ۲۶ : **معادله‌ی خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن ۲ و عرض از مبدأ آن ۴- باشد.**

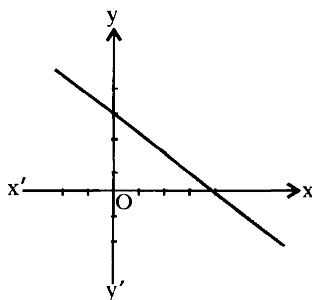
حل:

در واقع خط از دو نقطه‌ی $(۲,۰)$ و $(۰,-۴)$ می‌گذرد.

$$\frac{x}{۲}+\frac{y}{-۴}=۱\rightarrow ۲x-y=۴$$

مثال ۲۷ : **مساحت مثلثی را حساب کنید که خط $۳x+۴y=۱۲$ با محورهای مختصات می‌سازد.**

حل:



مساحت مثلث در واقع نصف قدرمطلق حاصل‌ضرب طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط می‌باشد.

$$x=۰\rightarrow ۳\times۰+۴y=۱۲\rightarrow y=۳ \qquad (۰,۳)$$

$$y=۰\rightarrow ۳x+۴\times۰=۱۲\rightarrow x=۴ \qquad (۴,۰)$$

$$S=\frac{۳\times۴}{۲}=۶$$

مثال ۲۸ : **شیب، عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط $۵x-۲y=۱۰$ را به‌دست آورید.**

حل:

عرض از مبدأ $x=۰\Rightarrow -۲y=۱۰\rightarrow y=-۵$

طول از مبدأ $y=۰\Rightarrow ۵x=۱۰\rightarrow x=۲$

$$۵x-۲y=۱۰\Rightarrow -۲y=-۵x+۱۰\Rightarrow y=\frac{۵}{۲}x-۵$$

شیب خط برابر $\frac{۵}{۲}$ است.

مثال ۲۹ : **مطلوبست معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(-۲,۳)$ بگذرد و عرض از مبدأ آن سه برابر طول از مبدأ باشد.**

حل:

$$\begin{cases} \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱ \\ q=۳p \end{cases} \Rightarrow \frac{-۲}{p}+\frac{۳}{۳p}=۱ \Rightarrow \frac{-۲}{p}+\frac{۱}{p}=۱ \Rightarrow \frac{-۱}{p}=۱ \to p=-۱ \text{ و } q=-۳$$

بنابراین معادله‌ی خط عبارت است از:

$$\frac{x}{-۱}+\frac{y}{-۳}=۱ \Rightarrow ۳x+y=-۳$$

خط $y=-\frac{۳}{۲}x$ نیز از نقطه‌ی A می‌گذرد و عرض از مبدأ آن سه برابر طول از مبدأ آن است.

مثال ۳۰ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۶,-۲)$ بگذرد و مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن ۵ باشد.

حل:

$$\begin{cases} \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱ \\ p+q=۵ \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{p}+\frac{y}{۵-p}=۱ \Rightarrow \frac{۶}{p}+\frac{-۲}{۵-p}=۱ \Rightarrow \frac{۳۰-۶p-۲p}{p(۵-p)}=۱$$

$$\Rightarrow ۳۰-۸p=۵p-p^۲ \Rightarrow p^۲-۱۳p+۳۰=۰ \Rightarrow (p-۳)(p-۱۰)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-۳=۰ \to p=۳ \to q=۲ \\ p-۱۰=۰ \to p=۱۰ \to q=-۵ \end{cases}$$

دو خط با مشخصات خواسته شده وجود دارد.

$$\frac{x}{۳}+\frac{y}{۲}=۱ \to ۲x+۳y=۶$$

$$\frac{x}{۱۰}+\frac{y}{-۵}=۱ \to x-۲y=۱۰$$

مثال ۳۱ :نشان دهید خط $\frac{۲}{۳}x-۳y=۸$ از نقطه‌ی $A(۳,-۲)$ می‌گذرد.

حل:

کافی است نشان دهیم مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی خط صدق می‌کند.

$$\frac{۲}{۳}\times۳-۳\times(-۲)=۸ \Rightarrow ۲+۶=۸ \Rightarrow ۸=۸$$

مثال ۳۲ : مقدار a را چنان تعیین کنید که خط زیر از نقطه‌ی $A\ (-۱,-۲)$ بگذرد.

$(a-۲)x-۳y=۲a-۴$

حل:

$(a-۲)(-۱)-۳\times(-۲)=۲a-۴ \Rightarrow -a+۲+۶=۲a-۴$

$\Rightarrow -a+۸=۲a-۴ \Rightarrow ۱۲=۳a \Rightarrow \boxed{a=۴}$

مثال ۳۳ : خط $۳x-۵y+۱۷=۰$ از نقطه‌ی $A\ (۲t-۳, t+۴)$ می‌گذرد. مقدار t چه‌قدر است؟

حل:

$۳(۲t-۳)-۵(t+۴)+۱۷=۰$

$۶t-۹-۵t-۲۰+۱۷=۰ \Rightarrow t-۱۲=۰ \Rightarrow t=۱۲$

مثال ۳۴ : نقطه‌ی $A\ (۲t-۵\ ,\ t+۳)$ روی خط $x=۷$ قراردارد. مقدار t چه‌قدر است؟

حل:

تمام نقاط واقع بر خط $x=۷$ طولشان ۷ می‌باشد.

$۲t-۵=۷ \to ۲t=۱۲ \to t=۶$

مثال ۳۵ : دو نقطه‌ی $A\ (۴t-۳\ ,\ ۲t-۱)$ و $B\ (۵,۹)$ بر خطی موازی محور طول قرار دارند. مقدار t چه‌قدر است؟

حل:

کلیه‌ی نقاطی که بر خط موازی محور طول قرار داشته باشند، عرضشان مساوی است.

$۲t-۱=۹ \Rightarrow ۲t=۱۰ \Rightarrow t=۵$

مثال ۳۶ : نشان دهید سه نقطه‌ی $A\ (۵,۷)$ و $B\ (۴,۳)$ و $C\ (۶,۱۱)$ روی یک خط راست قرار دارند.

حل:

معادله‌ی خطی که از نقاط A و B می‌گذرد را نوشته و مختصات C را در آن معادله قرار می‌دهیم.

$$m_{AB}=\frac{۷-۳}{۵-۴}=۴$$

$AB: y-۳=۴(x-۴) \Rightarrow y-۳=۴x-۱۶ \to y=۴x-۱۳$

$۱۱=۴\times۶-۱۳ \Rightarrow ۱۱=۱۱$

مختصات نقطه‌ی C در معادله‌ی خط AB صدق می‌کند. پس نقطه‌ی C روی خط AB قرار می‌گیرد. یعنی سه نقطه روی یک خط راست می‌باشند.

مثال ۳۷ : سه نقطه‌ی $A\,(۴,۹)$ و $B\,(۳,۵)$ و $C\,(n+۱\,,\,۳n)$ روی یک خط راست قرار دارند. مقدار n چه‌قدر است؟

حل:

$$AB : y-۹=\frac{۹-۵}{۴-۳}(x-۴) \Rightarrow y-۹=۴(x-۴) \rightarrow y-۹=۴x-۱۶$$

$$AB : y=۴x-۷ \Rightarrow ۳n=۴(n+۱)-۷ \Rightarrow ۳n=۴n+۴-۷ \rightarrow n=۳$$

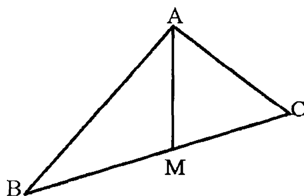
مثال ۳۸ : سه نقطه‌ی $A\,(۲,۵)$ و $B\,(m-۴, m+۶)$ و $C\,(۲,-۹)$ روی یک خط راست قرار دارند. مقدار m چه‌قدر است؟

حل:

با توجه به این‌که طول دو نقطه‌ی A و C برابر ۲ می‌باشد معادله‌ی خطی که از A و C می‌گذرد، به‌صورت $x=۲$ می‌باشد. پس طول نقطه‌ی B نیز باید ۲ باشد. $m-۴=۲ \rightarrow m=۶$

مثال ۳۹ : اگر $A\,(-۲,۳)$ و $B\,(۳,۴)$ و $C\,(-۷,-۲)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله‌ی ضلع AC و میانه‌ی AM را بنویسید.

حل:



$$m_{AC}=\frac{۳+۲}{-۲+۷}=\frac{۵}{۵}=۱$$

$$AC : y-۳=۱(x+۲) \Rightarrow y=x+۵$$

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{۳+(-۷)}{۲}=-۲$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{۴+(-۲)}{۲}=۱ \quad M\,(-۲,۱)$$

با توجه به این‌که طول دو نقطه‌ی A و M برابر ۲- می‌باشد، می‌توان گفت میانه‌ی AM موازی محور عرض است و معادله‌ی آن به‌صورت $x=-۲$ است.

مثال ۴۰ : اگر $A\,(۳,۵)$ و $B\,(۶,-۲)$ و $C\,(۱۳,۱)$ سه رأس یک مثلث باشند، نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است و میانه‌ی نظیر وتر مثلث نصف وتر است.

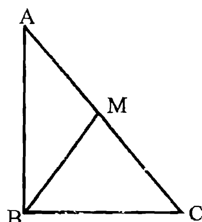
حل:

$$AB=\sqrt{(۳-۶)^۲+(۵+۲)^۲}=\sqrt{۹+۴۹}=\sqrt{۵۸}$$

$$AC=\sqrt{(۳-۱۳)^۲+(۵-۱)^۲}=\sqrt{۱۰۰+۱۶}=\sqrt{۱۱۶}$$

$$BC=\sqrt{(۶-۱۳)^۲+(-۲-۱)^۲}=\sqrt{۴۹+۹}=\sqrt{۵۸}$$

$$AB^۲+BC^۲=۵۸+۵۸=۱۱۶=AC^۲\Rightarrow \hat{B}=۹۰^\circ$$

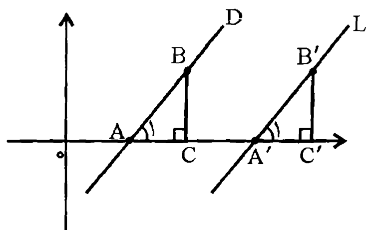


$$M=\begin{bmatrix}۸\\۳\end{bmatrix}\quad BM=\sqrt{(۶-۸)^۲+(-۲-۳)^۲}=\sqrt{۴+۲۵}=\sqrt{۲۹}$$

$$AC=\sqrt{۱۱۶}=\sqrt{۴\times۲۹}=۲\sqrt{۲۹}$$

$$BM=\frac{AC}{۲}$$

☆ شرط توازی دو خط



در شکل مقابل دو خط D و L موازیند. دو نقطه‌ی A و B را روی خط D و دو نقطه‌ی A' و B' را روی خط L درنظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم شیب دو خط مساوی است.

$$\left.\begin{array}{l}D\parallel L\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}'_۱\\ \hat{C}=\hat{C}'=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}\Rightarrow \frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}$$

$$\Rightarrow m_D=m_L$$

حال فرض می‌کنیم شیب دو خط D و L برابرند و نشان می‌دهیم دو خط موازیند.

$$\left.\begin{array}{l}m_D=m_L\Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}\Rightarrow \frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\\ \hat{C}=\hat{C}'=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}'_۱\Rightarrow D\parallel L$$

بنابراین می‌توان گفت اگر دو خط موازی باشند، شیب‌هایشان مساوی است و برعکس.

نکته: اگر شیب و عرض از مبدأ دو خط مساوی باشند دو خط بر هم منطبقند.

مثال ۴۱ : دو خط $y = ۴x + ۳$ و $۲y - tx = x - ۲$ با هم موازیند. مقدار t چه‌قدر است؟

حل:

$$۲y - tx = x - ۲ \Rightarrow ۲y = (t + ۱)x - ۲ \Rightarrow y = \left(\frac{t + ۱}{۲}\right)x - ۱$$

$$\frac{t + ۱}{۲} = ۴ \Rightarrow t + ۱ = ۸ \rightarrow t = ۷$$

مثال ۴۲ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A\ (۳, -۲)$ بگذرد و با خط $۴x - ۲y - ۱ = ۰$ موازی باشد.

حل:

$$۴x - ۲y - ۱ = ۰ \rightarrow -۲y = -۴x + ۱ \rightarrow y = ۲x - \frac{۱}{۲} \Rightarrow m = ۲$$

$$y + ۲ = ۲(x - ۳) \rightarrow y + ۲ = ۲x - ۶ \rightarrow y = ۲x - ۸$$

مثال ۴۳ : معین کنید دو خط زیر به ازای چه مقداری از n موازی و به ازای چه مقداری از n منطبق می‌شوند:

$$y = (n - ۱)^۲ x - ۳ \qquad\qquad y = ۴x + n - ۲$$

حل:

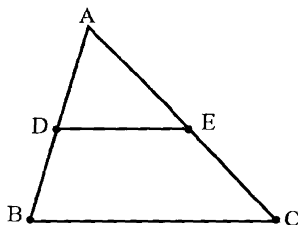
$$(n - ۱)^۲ = ۴$$

$$n - ۱ = ۲ \rightarrow n = ۳ \qquad\qquad n - ۱ = -۲ \Rightarrow n = -۱$$

به ازای $n = ۳$ عرض از مبدأ دو خط مختلف می‌باشند. پس دو خط موازیند. اما به ازای $n = -۱$ عرض از مبدأ هر دو خط ۳- می‌شود که در این صورت دو خط بر هم منطبق می‌شوند.

مثال ۴۴ : اگر $A\ (-۴, ۱)$ و $B\ (۰, ۵)$ و $C\ (۴, -۳)$ سه رأس یک مثلث و D و E وسط‌های اضلاع AB و AC باشند، نشان دهید DE با ضلع BC موازی و مساوی نصف آن است.

حل:



$$x_D = \frac{-۴+۰}{۲} = -۲$$

$$y_D = \frac{۱+۵}{۲} = ۳ \qquad D(-۲,۳)$$

$$x_E = \frac{-۴+۴}{۲} = ۰$$

$$y_E = \frac{-۳+۱}{۲} = -۱ \qquad E(۰,-۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{DE} = \frac{۳+۱}{-۲-۰} = \frac{۴}{-۲} = -۲ \\ m_{BC} = \frac{۵+۳}{۰-۴} = \frac{۸}{-۴} = -۲ \end{array}\right\} \Rightarrow m_{DE} = m_{BC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

$$\left.\begin{array}{l} DE = \sqrt{(-۲-۰)^۲ + (۳+۱)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵} \\ BC = \sqrt{(۰-۴)^۲ + (۵+۳)^۲} = \sqrt{۱۶+۶۴} = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵} \end{array}\right\} \Rightarrow DE = \frac{BC}{۲}$$

مثال ۴۵ : اگر $D: Ax+By+C=۰$ و $D': A'x+B'y+C'=۰$ باشد، ثابت کنید دو خط در صورتی موازیند که $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ و دو خط منطبقند در صورتی‌که $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

حل:

شیب خط D برابر $-\frac{A}{B}$ و شیب خط D' برابر $-\frac{A'}{B'}$ می‌باشند. هم‌چنین عرض از مبدأ خط D برابر $-\frac{C}{B}$ و عرض از مبدأ خط D' برابر $-\frac{C'}{B'}$ است.

شرط تساوی شیب‌ها $\quad \frac{-A}{B} = \frac{-A'}{B'} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \Rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$

شرط تساوی عرض از مبدأها $\quad \frac{-C}{B} = \frac{-C'}{B'} \Rightarrow \frac{C}{B} = \frac{C'}{B'} \Rightarrow \frac{C}{C'} = \frac{B}{B'}$

بنابراین اگر $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$ باشد در واقع هم شیب‌های دو خط برابرند و هم عرض از مبدأهای آن‌ها که در این صورت دو خط منطبق می‌شوند و اگر $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$ باشد، شیب‌های دو خط مساوی و عرض از مبدأهای آن‌ها متفاوت می‌شود و دو خط موازی می‌باشند.

مثال ۴۶ : دو خط $D:۳x+۲y+۱=۰$ و $D':۶x+۴y+۳=۰$ با هم موازیند. زیرا:

حل:

$$\frac{۳}{۶}=\frac{۲}{۴}\neq\frac{۱}{۳}$$

مثال ۴۷ : دو خط $D:x-۲y+۳=۰$ و $D':۳x-۶y+۹=۰$ برهم منطبق‌اند، زیرا:

$$\frac{۱}{۳}=\frac{-۲}{-۶}=\frac{۳}{۹}$$

مثال ۴۸ : مقدار n را چنان تعیین کنید که دو خط زیر با هم موازی باشند.

$$D:(n-۱)x+ny-۱=۰$$
$$D':۴nx+(n-۱)y+۲=۰$$

حل:

$$\frac{n-۱}{۴n}=\frac{n}{n-۱}\neq\frac{-۱}{۲}$$

$$(n-۱)^۲=۴n^۲\Rightarrow(n-۱)^۲-۴n^۲=۰\Rightarrow(n-۱-۲n)(n-۱+۲n)=۰$$

$$\Rightarrow(-n-۱)(۳n-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}-n-۱=۰\rightarrow \boxed{n=-۱}\\ ۳n-۱=۰\rightarrow \boxed{n=\frac{۱}{۳}}\end{cases}$$

به ازای $n=\frac{۱}{۳}$ سه نسبت فوق مساوی شده و دو خط بر هم منطبق می‌شوند. لذا به ازای $n=-۱$ دو خط D و D' موازی می‌شوند.

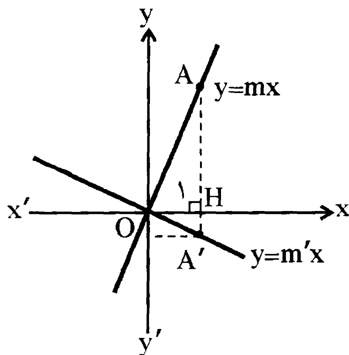
نکته: اگر عرض از مبدأ چند خط با هم برابر باشند، آن خطوط یک‌دیگر را در نقطه‌ای واقع بر محور عرض قطع می‌کنند.

نکته: خطوطی که عرض از مبدأ آن‌ها تعریف نشده است موازی محور عرض می‌باشند. لذا خودشان با هم موازیند.

نکته: اگر طول از مبدأ چند خط برابر باشند آن خطوط یک‌دیگر را در نقطه‌ای واقع بر محور طول قطع می‌کنند.

☆ شرط تعامد دو خط

دو خط $D : y = mx + d$ و $D' : y = m'x + d'$ را درنظر بگیرید. شرط عمود بودن دو خط D و D' آن است که دو خط $y = mx$ و $y = m'x$ بر هم عمود باشند. اکنون دو خط $y = mx$ و $y = m'x$ را در شکل زیر درنظر گرفته و از نقطه‌ی H به طول ۱ واقع بر محور $x'Ox$ خطی عمود بر این محور رسم می‌کنیم تا دو خط فوق را در نقاط A و A' قطع کند. مختصات نقاط A و A' عبارتند از $A\,(۱,m)$ و $A'(۱,m')$ برای این‌که دو خط OA و OA' بر هم عمود باشند یعنی مثلث OAA' قائم‌الزاویه باشد، لازم است که داشته باشیم $OA^۲ + OA'^۲ = AA'^۲$.



$$۱ + m^۲ + ۱ + m'^۲ = (m - m')^۲$$

$$۱ + m^۲ + ۱ + m'^۲ = m^۲ - ۲mm' + m'^۲$$

$$\Rightarrow ۲ - ۲mm' \Rightarrow \boxed{mm' = -۱}$$

بنابراین برای آن‌که دو خط راست بر هم عمود باشند باید حاصل‌ضرب شیب‌هایشان ۱- باشد.

مثال ۱۴۹ : معادله‌ی خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن ۲ بوده و بر خط $۲x - ۳y = ۱$ عمود شود.

حل:

در واقع خط از نقطه‌ی (۲,۰) می‌گذرد.

$$۲x - ۳y = ۱ \to -۳y = -۲x + ۱ \to y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۱}{۳}$$

$$m \times \frac{۲}{۳} = -۱ \to m = -\frac{۳}{۲}$$

$$y - ۰ = -\frac{۳}{۲}(x - ۲) \to y = \frac{-۳}{۲}x + ۳ \to ۳x + ۲y = ۶$$

مثال ۵۰ : دو خط زیر بر هم عمودند. مقدار n چه‌قدر است؟

$$3x - 2y = nx - 4y + 5 \qquad\qquad y = 2x - 7$$

حل:

$$3x - 2y = nx - 4y + 5 \Rightarrow 4y - 2y = nx - 3x + 5$$

$$2y = (n-3)x + 5 \Rightarrow y = \left(\frac{n-3}{2}\right)x + \frac{5}{2}$$

$$\frac{n-3}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow n - 3 = -1 \Rightarrow n = 2$$

مثال ۵۱ : نشان دهید دو خط $D : Ax + By + C = 0$ و $D' : A'x + B'y + C' = 0$ در صورتی بر هم عمودند که $A \times A' + B \times B' = 0$.

حل:

$$m_D = -\frac{A}{B} \quad \text{و} \quad m_{D'} = -\frac{A'}{B'}$$

$$\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1 \Rightarrow \frac{A \times A'}{B \times B'} = -1$$

$$\Rightarrow A \times A' = -B \times B' \Rightarrow \boxed{A \times A' + B \times B' = 0}$$

مثال ۵۲ : دو خط زیر بر هم عمودند. مقدار n چه‌قدر است؟

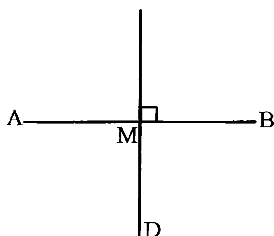
$$(n-1)x - 3y + 4 = 0 \qquad\qquad 2x + (n+1)y - 1 = 0$$

حل:

$$2(n-1) - 3(n+1) = 0 \Rightarrow 2n - 2 - 3n - 3 = 0 \Rightarrow -n = 5 \Rightarrow n = -5$$

مثال ۵۳ : اگر $A\ (3,2)$ و $B\ (-5,4)$ دو سر یک پاره‌خط باشند معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

حل:



$$x_M = \frac{-5+3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_M = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow M\ (-1,3)$$

$$m_{AB} = \frac{2-4}{3-(-5)} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4} \rightarrow m_D = 4$$

$$D : y - 3 = 4(x+1) \rightarrow y = 4x + 4 + 3 \rightarrow y = 4x + 7$$

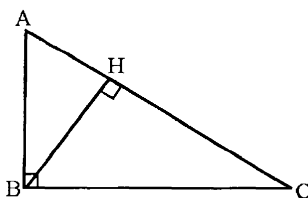
مثال ۵۴ : اگر $A\ (-۳,-۲)$ و $B\ (۱,۵)$ و $C\ (-۶,۹)$ سه رأس یک مثلث باشند:

اولاً: نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ثانیاً: معادله‌ی ارتفاع نظیر وتر مثلث را بنویسید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\dfrac{-۲-۵}{-۳-۱}=\dfrac{-۷}{-۴}=\dfrac{۷}{۴} \\ m_{BC}=\dfrac{۵-۹}{۱+۶}=\dfrac{-۴}{۷} \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp BC \rightarrow \hat{B}=۹۰$$



$$m_{AC}=\dfrac{-۲-۹}{-۳+۶}=\dfrac{-۱۱}{۳}\rightarrow m_{BH}=\dfrac{۳}{۱۱}$$

$$BH: y-۵=\dfrac{۳}{۱۱}(x-۱)$$

$$۱۱y-۵۵=۳x-۳ \Rightarrow ۳x-۱۱y+۵۲=۰$$

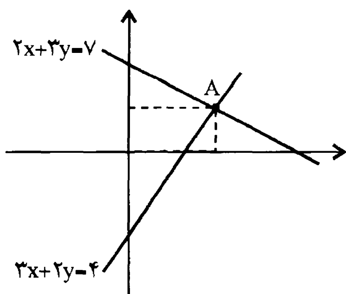
☆ فصل مشترک دو خط راست

دو خط راست در صفحه نسبت به هم سه حالت دارند.

۱) **دو خط متقاطعند:** در این صورت دو خط یک نقطه‌ی مشترک دارند که مختصات این نقطه در معادله‌ی هر دو خط صدق می‌کند. لذا این نقطه جواب دستگاه دو معادله و دومجهولی می‌باشد که از معادلات آن دو خط تشکیل شده است.

مثال ۵۵ : مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط $۳x-۲y=۴$ و $۲x+۳y=۷$ را به‌دست آورید.

حل:



$$\begin{cases} ۳x-۲y=۴ \\ ۲x+۳y=۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹x-۶y=۱۲ \\ ۴x+۶y=۱۴ \end{cases}$$

$$۱۳x=۲۶ \rightarrow x=۲$$

$$۳\times۲-۲y=۴ \rightarrow -۲y=-۲ \rightarrow y=۱$$

بنابراین نقطه‌ی تلاقی دو خط نقطه‌ی $A\ (۲,۱)$ می‌باشد.

۲) **دو خط با هم موازیند:** در این صورت دو خط هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.

مثال ۵۶ : مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط $x-2y=1$ و $2x-4y=3$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-4y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+4y=-2 \\ 2x-4y=3 \end{cases}$$
$$0=1$$

تساوی اخیر نادرست است. به عبارت دیگر دستگاه فوق غیرممکن است و جواب ندارد. در واقع می‌توان گفت با توجه به این‌که دو خط $x-2y=1$ و $2x-4y=3$ موازیند، نقطه‌ی برخورد ندارند.

۳) **دو خط منطبقند:** در این صورت دو خط بیشمار نقطه‌ی مشترک دارند.

مثال ۵۷ : فصل مشترک خطوط $2x-y=3$ و $4x-2y=6$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+2y=-6 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$$
$$0=0$$

این تساوی همواره درست است. به عبارت دیگر به ازای تمام مقادیر x و y دستگاه جواب دارد. در واقع می‌توان گفت با توجه به این‌که دو خط منطبقند بیشمار نقطه‌ی مشترک دارند.

مثال ۵۸ : دستگاه زیر جواب ندارد. مقدار n چه‌قدر است؟

$$\begin{cases} (n+3)x+(n-1)y=7 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$$

حل:

با توجه به این‌که دستگاه جواب ندارد، می‌توان گفت دو خط موازیند.

$$\frac{n+3}{3}=\frac{n-1}{2}\neq\frac{7}{4}\Rightarrow 2n+6=3n-3\Rightarrow n=9$$

به ازای $n=9$ کسر $\frac{n-1}{2}$ برابر ۴ می‌شود که با $\frac{7}{4}$ مساوی نیست.

مثال ۵۹ : **مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دستگاه زیر بیشمار جواب داشته باشد.**

$$\begin{cases} 2ax + 3by = x + 2y + 6 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} 2ax + 3by - x - 2y = 6 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a-1)x + (3b-2)y = 6 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$$

$$\frac{2a-1}{2} = \frac{3b-2}{5} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{2a-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a - 1 = 1 \Rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1$$

$$\frac{3b-2}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6b - 4 = 5 \rightarrow 6b = 9 \rightarrow b = \frac{3}{2}$$

مثال ۶۰ : **تحقیق کنید سه خط زیر از یک نقطه می‌گذرند یا خیر؟**

$D : 3x + 2y = 1 \qquad D' : 5x - y = 6 \qquad D'' : 7x - 4y = 11$

حل:

نقطه‌ی برخورد دو خط D و D' را به‌دست آورده و مختصات آن‌را در معادله‌ی خط D'' قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 10x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow 13x = 13 \Rightarrow x = 1$$

$5 \times 1 - y = 6 \rightarrow y = -1 \qquad A\,(1,-1)$

$7x - 4y = 11$

$7 \times 1 - 4 \times (-1) = 11 \Rightarrow 7 + 4 = 11 \Rightarrow 11 = 11$

مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی خط D'' صدق می‌کند. پس سه خط D، D' و D'' از یک نقطه می‌گذرند.

مثال ۶۱ : **مقدار n را چنان تعیین کنید که سه خط زیر از یک نقطه بگذرند.**

$D : 7x - 3y = 11 \qquad D' : 2nx - (n-1)y = 10 \qquad D'' : 5x - 6y = 4$

حل:

$$\begin{cases}7x-3y=11\\5x-6y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-14x+6y=-22\\5x-6y=4\end{cases}\Rightarrow -9x=-18\Rightarrow x=2$$

$$5\times2-6y=4\Rightarrow -6y=-6\Rightarrow y=1\quad A(2,1)$$

$$2n\times2-(n-1)\times1=10\Rightarrow 4n-n+1=10\Rightarrow 3n=9\Rightarrow n=3$$

☆ فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x_0,y_0)$ تا خط L

اگر خط L به معادله‌ی $Ax+By+C=0$ مفروض باشد، شیب خط L برابر $-\frac{A}{B}$ و در نتیجه شیب خط PH برابر با $\frac{B}{A}$ است. معادله‌ی خط PH عبارت است از:

$$y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)\Rightarrow\frac{y-y_0}{B}=\frac{x-x_0}{A}$$

H محل برخورد دو خط L و PH است. یعنی H از حل دستگاه:

$$\begin{cases}Ax+By+C=0 & (1)\\ \frac{y-y_0}{B}=\frac{x-x_0}{A} & (2)\end{cases}$$

به‌دست می‌آید. اگر معادله‌ی دوم را برابر t قرار دهیم، داریم:

$$\frac{y-y_0}{B}=\frac{x-x_0}{A}=t\Rightarrow\begin{cases}x=At+x_0\\y=Bt+y_0\end{cases}$$

این x و y باید در معادله ی (۱) دستگاه نیز صدق کنند تا جواب دستگاه باشند.

$$A(At+x_0)+B(Bt+y_0)+C=0\Rightarrow t=-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}$$

فاصله‌ی نقطه P از خط L یعنی PH برابر است با:

$$PH=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{A^2t^2+B^2t^2}=|t|\times\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\Rightarrow PH=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

مثال ۶۲ :فاصله‌ی نقطه‌ی $M\ (۲,-۳)$ از خط $D: ۳x - ۴y + ۲ = ۰$ چه‌قدر است؟

حل:

$$d = \frac{|۳\times۲ - ۴\times(-۳) + ۲|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = \frac{|۶+۱۲+۲|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{|۲۰|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

نکته: فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $Ax + By + C = ۰$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^۲ + B^۲}}$$

مثال ۶۳ : ثابت کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $M\ (x_۰, y_۰)$ از خط $x = h$ برابر است با $|x_۰ - h|$.

حل:

فاصله‌ی نقطه‌ی $M\ (x_۰, y_۰)$ از خط $x = h$ که می‌توان آن‌را به‌صورت $۱x + ۰y - h = ۰$ نوشت بر اساس فرمول برابر است با:

$$d = \frac{|۱\times x_۰ + ۰\times y_۰ - h|}{\sqrt{۱^۲ + ۰^۲}} = \frac{|x_۰ - h|}{\sqrt{۱}} = |x_۰ - h|$$

مثال ۶۴ : ثابت کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $M\ (x_۰, y_۰)$ از خط $y = b$ برابر است با $|y_۰ - b|$.

حل:

فاصله‌ی نقطه‌ی $M\ (x_۰, y_۰)$ از خط $y = b$ که می‌توان آن‌را به‌صورت $۰x + ۱y - b = ۰$ بر طبق فرمول برابر است با:

$$d = \frac{|۰\times x_۰ + ۱\times y_۰ - b|}{\sqrt{۰^۲ + ۱^۲}} = \frac{|y_۰ - b|}{\sqrt{۱}} = |y_۰ - b|$$

مثال ۶۵ : فاصله‌ی نقطه‌ی $M\ (۲,-۵)$ را از خطوط $x = -۳$ و $y = ۴$ به‌دست آورید.

حل:

فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط $x = -۳$ برابر است با: $|۲-(-۳)| = |۵| = ۵$

فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط $y = ۴$ برابر است با: $|-۵-۴| = |-۹| = ۹$

مثال ۶۶ : اگر $A\ (-۲,۳)$ و $B\ (۴,-۴)$ و $C\ (-۴,۲)$ سه رأس یک مثلث باشند:

اولاً: معادله‌ی میانه‌ی AM را بنویسید.

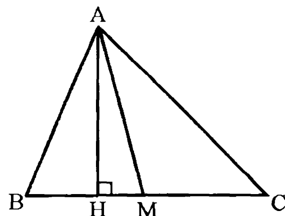
ثانیاً: معادله‌ی ارتفاع AH را بنویسید.

ثالثاً: فاصله‌ی نقطه‌ی A تا ضلع BC را به‌دست آورید.

رابعاً: مساحت مثلث را حساب کنید.

حل:

اولاً:



$$x_M = \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{۴+(-۴)}{۲} = ۰$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{-۴+۲}{۲} = -۱ \qquad \Rightarrow M\ (۰,-۱)$$

$$m_{AM} = \frac{۳-(-۱)}{-۲-۰} = \frac{۴}{-۲} = -۲$$

$$AM : y + ۱ = -۲(x - ۰) \rightarrow y = -۲x - ۱$$

ثانیاً:

$$m_{BC} = \frac{-۴-۲}{۴+۴} = \frac{-۶}{۸} = \frac{-۳}{۴} \rightarrow m_{AH} = \frac{۴}{۳}$$

$$AH : y - ۳ = \frac{۴}{۳}(x + ۲) \rightarrow y - ۳ = \frac{۴}{۳}x + \frac{۸}{۳} \rightarrow y = \frac{۴}{۳}x + \frac{۱۷}{۳}$$

ثالثاً:

$$AH : ۴x - ۳y + ۱۷ = ۰$$

$$m_{BC} = \frac{-۳}{۴}$$

$$BC : y + ۴ = -\frac{۳}{۴}(x - ۴) \rightarrow y + ۴ = \frac{-۳}{۴}x + ۳$$

$$y + \frac{۳}{۴}x + ۱ = ۰ \rightarrow ۳x + ۴y + ۴ = ۰$$

$$AH = \frac{|۳\times(-۲)+۴\times۳+۴|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}} = \frac{|-۶+۱۲+۴|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{|۱۰|}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

رابعاً:

$$BC = \sqrt{۴-(-۴)^۲ + (-۴-۲)^۲} = \sqrt{۶۴+۳۶} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{۲\times۱۰}{۲} = ۱۰$$

مثال ۶۷ : مقدار a را چنان تعیین کنید که سه خط زیر در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند:

$$D_1 : 3x - y - 1 = 0 \quad D_2 : (a-2)x + 2y - 2a = 0 \quad D_3 : 2x + 3y - 8 = 0$$

حل:

مختصات نقطه‌ی برخورد دو خط D_1 و D_3 را حساب کرده و آن‌را در معادله‌ی خط D_2 جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 3y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow 11x = 11 \rightarrow x = 1$$

$$3 \times 1 - y = 1 \rightarrow y = 2$$

نقطه‌ی برخورد D_1 و D_3: (۱ و ۲)

$$(a-2)\times 1 + 2\times 2 - 2a = 0 \rightarrow a - 2 + 4 - 2a = 0 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

مثال ۶۸ : به چهار روش نشان دهید سه نقطه‌ی $A(6,3)$ و $B(3,1)$ و $C(-3,-3)$ بر یک خط راست قرار دارند.

حل:

روش اول: نشان می‌دهیم شیب AB و شیب BC برابر است:

$$m_{AB} = \frac{3-1}{6-3} = \frac{2}{3} \qquad m_{BC} = \frac{1+3}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow m_{AB} = m_{BC}$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که دو خط AB و BC یا موازیند یا منطبق. اما با توجه به این‌که یک نقطه‌ی مشترک دارند، می‌توان گفت AB و BC برهم منطبقند. لذا نقاط A و B و C بر یک خط راست قرار می‌گیرند.

روش دوم: معادله‌ی خط AB را می‌نویسیم و مختصات نقطه‌ی C را در آن جایگزین می‌کنیم.

$$m_{AB} = \frac{3-1}{6-3} = \frac{2}{3} \qquad AB : y - 3 = \frac{2}{3}(x - 6)$$

معادله‌ی خط AB:

$$\Rightarrow y - 3 = \frac{2}{3}x - 4 \rightarrow y = \frac{2}{3}x - 1$$

$$-3 = \frac{2}{3}\times(-3) - 1 \Rightarrow -3 = -3$$

مختصات نقطه‌ی C در معادله‌ی خط AB صدق می‌کند. بنابراین سه نقطه‌ی A و B و C بر یک استقامتند.

روش سوم: طول پاره‌خط‌های AB و BC و AC را حساب کرده و نشان می‌دهیم طول یکی با مجموع طول‌های دوتای دیگر برابر است.

$$AB=\sqrt{(۶-۳)^۲+(۳-۱)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

$$BC=\sqrt{(۳+۳)^۲+(۱+۳)^۲}=\sqrt{۳۶+۱۶}=\sqrt{۵۲}=۲\sqrt{۱۳}$$

$$AC=\sqrt{(۶+۳)^۲+(۳+۳)^۲}=\sqrt{۸۱+۳۶}=\sqrt{۱۱۷}=۳\sqrt{۱۳}$$

ملاحظه می‌شود $AB+BC=AC$. بنابراین A و B و C بر یک خط راست قرار دارند.

روش چهارم: نشان می‌دهیم فاصله‌ی نقطه‌ی C از خط AB برابر صفر است.

$$AB: y=\frac{۲}{۳}x-۱\Rightarrow ۲x-۳y-۳=۰$$

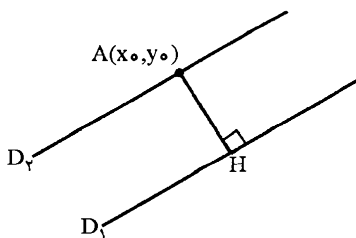
$$d=\frac{|۲\times(-۳)-۳\times(-۳)-۳|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|-۶+۹-۳|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{۰}{\sqrt{۱۳}}=۰$$

بنابراین نقطه‌ی C روی خط AB قرار می‌گیرد.

☆ فاصله‌ی دو خط موازی

برای تعیین فاصله‌ی دو خط موازی کافی است فاصله‌ی یک نقطه از یک خط را تا خط دیگر به‌دست آوریم. برای این منظور معادله‌ی دو خط موازی را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$D_۲: Ax+By+C'=۰ \quad \text{و} \quad D_۱: Ax+By+C=۰$$



نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ را روی خط $D_۲$ اختیار می‌کنیم. فاصله‌ی این نقطه تا خط $D_۱$ را از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آوریم.

$$AH=\frac{|Ax_۰+By_۰+C|}{\sqrt{A^۲+B^۲}} \qquad (۱)$$

مختصات نقطه‌ی A باید در معادله‌ی خط $D_۲$ صدق کند.

$$Ax_۰+By_۰+C'=۰\Rightarrow Ax_۰+By_۰=-C' \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow AH=\frac{|-C'+C|}{\sqrt{A^۲+B^۲}}=\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^۲+B^۲}}$$

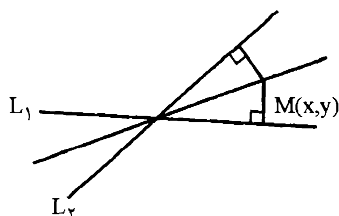
مثال ۶۹ : فاصله‌ی دو خط موازی $D_1: 3x+4y+1=0$ و $D_2: 6x+8y-8=0$ را به‌دست آورید.

حل:

$$D_1: 3x+4y+1=0 \rightarrow 6x+8y+2=0$$

$$d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2-(-8)|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{|10|}{\sqrt{100}}=\frac{10}{10}=1$$

معادله‌ی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط



دو خط $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ و $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ را درنظر بگیرید. هر نقطه مانند $M(x,y)$ واقع بر نیمساز زاویه‌ی بین دو خط فوق دارای این ویژگی است که از دو خط L_1 و L_2 به یک فاصله می‌باشد.

لذا معادله‌ی نیمساز عبارتست از:

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

چنان‌که ملاحظه می‌کنید این معادله شامل دو خط است که معادله‌ی دو نیمساز را می‌دهد.

مثال ۷۰ : معادله‌ی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط D, D' را به‌دست آورید.

$$D: 3x+4y-1=0 \qquad D': 5x-12y+1=0$$

حل:

$$\frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5x-12y+1|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}$$

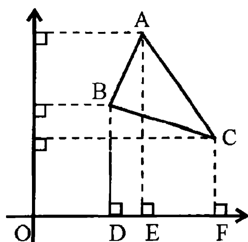
$$\frac{|3x+4y-1|}{5}=\frac{|5x-12y-1|}{13}\Rightarrow\frac{3x+4y-1}{5}=\frac{5x-12y+1}{13}$$

$$39x+52y-13=25x-60y+5\Rightarrow 14x+112y-18=0\Rightarrow 7x+56y-9=0$$

$$\frac{3x+4y-1}{5}=\frac{-5x+12y-1}{13}\Rightarrow 39x+52y-13=-25x+60y-5$$

$$\Rightarrow 64x-8y-8=0\Rightarrow 8x-y-1=0$$

محاسبه‌ی مساحت مثلث به کمک مختصات رئوس آن



فرض کنیم $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ و $C(x_۳, y_۳)$ سه رأس مثلث باشند.

$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \left|S(ABDE) + S(ACFE) - S(BCFD)\right| = \left|\frac{۱}{۲}(BD+AE)\times DE\right.$$

$$\left. + \frac{۱}{۲}(AE+CF)\times EF - \frac{۱}{۲}(BD+CF)\times DF\right| =$$

$$\left|\frac{۱}{۲}(y_۲+y_۱)(x_۱-x_۲) + \frac{۱}{۲}(y_۱+y_۳)(x_۳-x_۱) - \frac{۱}{۲}(y_۲+y_۳)(x_۳-x_۱)\right|$$

$$= \frac{۱}{۲}\left|x_۱y_۲ + x_۱y_۱ - x_۲y_۲ - x_۲y_۱ + y_۱x_۳ + x_۳y_۳ - x_۱y_۱ - x_۱y_۳ - x_۳y_۲\right.$$

$$\left. - x_۳y_۳ + x_۱y_۲ + x_۱y_۳\right|$$

$$= \frac{۱}{۲}\left|x_۱y_۲ - x_۲y_۱ + x_۳y_۱ - x_۱y_۳ - x_۳y_۲ + x_۲y_۳\right|$$

$$= \frac{۱}{۲}\left|x_۱(y_۲ - y_۳) + x_۲(y_۳ - y_۱) + x_۳(y_۱ - y_۲)\right|$$

مثال ۷۱ : اگر $A(۴, -۲)$ و $B(-۶, ۲)$ و $C(۴, ۴)$ سه رأس مثلث باشند، مساحت مثلث را حساب کنید.

حل:

$$S = \frac{۱}{۲}\left|۴(۲-۴) - ۶(۴+۲) + ۴(-۲-۲)\right| = \frac{۱}{۲}\left|-۸ - ۳۶ - ۱۶\right| = \frac{۱}{۲}\left|-۶۰\right| = ۳۰$$

تمرین‌های فصل دهم

۱. اگر $A\ (۱,۲)$ و $B\ (-۲,۴)$ و $C\ (۳,۱)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع باشند، مختصات رأس چهارم را پیدا کنید.

۲. مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که نقاط $A\ (۲-m\ ,\ ۲n+۳)$ و $B\ (-۲,۴)$ و $C\ (n+۱,۲m)$ و $D\ (m+۳n\ ,n-۵)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد.

۳. نقاط $A\ (-۲,-۳)$ و $B\ (۴,۰)$ دو رأس مثلثی هستند که نقطه‌ی $G\ (۳,-۲)$ محل تلاقی میانه‌های آن است. مختصات رأس سوم مثلث را پیدا کنید.

۴. مقدار t را چنان تعیین کنید که خط $(۲t-۱)x-۳ty=t+۱۳$ از نقطه‌ی $A\ (-۱,-۲)$ بگذرد.

۵. مقدار t را چنان تعیین کنید که طول از مبدأ خط زیر برابر ۳ باشد.

$tx-(۳t-۲)y=x+۱۲$

۶. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که خط زیر موازی محور طول بوده و محور عرض را در نقطه‌ای به عرض ۱− قطع کند.

$(a-b-۴)x-(b-۲)y+a+۴=۰$

۷. معادله‌ی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، هم‌چنین معادله ی نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم را به‌دست آورید.

۸. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x\ ,y\ )$ را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم و نسبت به نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم به‌دست آورید.

۹. معادله‌ی خطی را بنویسید که عرض از مبدأ آن ۳- و طول از مبدأ آن ۵ باشد.

۱۰. ثابت کنید سه نقطه‌ی $A\ (۲,-۳)$ و $B\ (-۲,۵)$ و $C\ (۳,-۵)$ روی یک خط راست قرار می‌گیرند.

۱۱. مقدار a را چنان تعیین کنید که سه نقطه‌ی $A(۲a-۱, ۳-a)$ و $B(-۱,۲)$ و $C(۲,-۱)$ بر یک خط راست باشند.

۱۲. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ بگذرد و مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن ۲- باشد.

۱۳. معادله‌ی خطوطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ بگذرند و حاصلضرب طول از مبدأ و عرض از مبدأ هریک از آن‌ها برابر یک باشد.

۱۴. اگر $A(۱,۱)$ و $B(۲,۲)$ و $C(-۱,۳)$ سه رأس یک مثلث باشند:

اولاً: نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ثانیاً: مساحت مثلث را به‌دست آورید.

ثالثاً: معادله‌ی میانه‌ی BM را بنویسید.

۱۵. اگر $A(۱,-۲)$ و $B(۵,۴)$ دو سر یک پاره‌خط باشند معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

۱۶. نقطه‌ای روی نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم پیدا کنید به قسمی که فاصله‌اش از نقطه‌ی $M(۱,۱)$ برابر $\sqrt{۲۰}$ باشد.

۱۷. نقاط $A(۲,a)$ و $B(۰,۳)$ و $C(-۲,-۳)$ رئوس مثلث ABC می‌باشند. مقدار a را چنان تعیین کنید که مثلث در رأس A متساوی‌الساقین باشد. سپس مساحت مثلث را حساب کنید.

۱۸. روی خط $y = x + ۴$ نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از دو نقطه‌ی $A(۱,۴)$ و $B(۳,-۴)$ به یک اندازه باشند. (دو روش)

۱۹. نقطه‌ی A را روی محور طول چنان تعیین کنید که از دو نقطه‌ی $B(۴,۱)$ و $C(۲,۳)$ به یک فاصله باشد. (دو روش)

۲۰. نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۴,۱)$ دو رأس مثلثی هستند که رأس سوم آن روی محور طول و محل تلاقی میانه‌های آن روی نیمساز ربع اول است. مختصات رأس سوم را پیدا کنید.

۲۱. اگر $A(-۴,۷)$ و $B(۴,۳)$ و $C(۰,-۵)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع AC و ارتفاع نظیر ضلع AB را بنویسید.

۲۲. اگر $M\ (1,-1)$ و $N\ (3,1)$ و $P\ (-1,2)$ وسط‌های اضلاع یک مثلث باشند، مختصات رئوس مثلث را به‌دست آورید.

۲۳. مرکز دایره‌ای را پیدا کنید که از سه نقطه‌ی $A\ (-3,-8)$ و $B\ (2,7)$ و $C\ (4,3)$ بگذرد.

۲۴. مقدار a را چنان تعیین کنید که دو خط زیر با هم عمود باشند.

$$D: 2x - y = 1 \qquad D': (a-1)x + 2y = x - 2$$

۲۵. مقدار a را چنان تعیین کنید که دو خط زیر باهم موازی باشند.

$$(2a-3)x + ay - 2 = 2y + 3a$$
$$(3a-1)y + 2(3a+1)x = a - 1$$

۲۶. مقدار a را چنان تعیین کنید که دو خط $4y - 3x + 1 = 0$ و $(2a-1)x + 3(a+2)y = 1$ بر روی نیمساز ربع اول و سوم متقاطع باشند.

۲۷. معادله‌ی خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $x + y - 2 = 0$ و $2x - y + 5 = 0$ گذشته و بر خط $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ عمود باشد.

۲۸. مقدار a را چنان تعیین کنید که دستگاه زیر جواب نداشته باشد.

$$\begin{cases}(2-a)x + y = 1\\ ax - 3y = 5\end{cases}$$

۲۹. اگر فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $4y - 3x + 2a - 1 = 0$ برابر ۳ باشد مقادیر a را حساب کنید.

۳۰. فاصله‌ی نقطه‌ی $A\ (-2,2)$ را از خط $\frac{2-3x}{4} - \frac{3+2y}{2} = 1$ به‌دست آورید.

۳۱. معادله‌ی یک قطر مربع $3x + 4y + 2 = 0$ و یک رأس آن $A\ (2,3)$ است. مساحت مربع را تعیین کنید.

۳۲. معادله‌ی دو ضلع مجاور یک مستطیل $y - x - 5 = 0$ و $x + y - 7 = 0$ می‌باشد. اگر مبدأ مختصات یک رأس مستطیل باشد، مساحت آن‌را به‌دست آورید.

۳۳. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A\ (2a+1\ ,\ a-1)$ از خط $4y-3x+5=0$ برابر ۸ باشد، مقادیر a را تعیین کنید.

۳۴. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A\ (2a-3, 5)$ از خط $x=-4$ برابر ۷ باشد، مقادیر a را تعیین کنید.

۳۵. نقطه‌ی $M\ (5\ ,3)$ مرکز لوزی $ABCD$ و $x+y=9$ یکی از اضلاع آن و قطرهای آن موازی محورهای مختصات است. مختصات رأس‌های لوزی را تعیین کنید.

۳۶. به ازای چه مقدار از a دو خط زیر:

اولاً: موازی

ثانیاً: منطبق

ثالثاً: بر هم عمود می‌باشند؟

$$D: 3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$$
$$D': ax+(a-1)y-2(a+2)=0$$

۳۷. مقدار m را چنان تعیین کنید که سه خط $x-y=1$ و $2x+y=5$ و $(2m-5)x+my=5$ در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند؟

۳۸. نقاطی به‌طول ۳ در صفحه‌ی مختصات پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $A\ (-3,6)$ برابر ۱۰ باشد.

۳۹. به ازای چه مقدار از m خطوط به معادلات زیر یک‌دیگر را روی محور عرض قطع می‌کنند؟

$$(2m+1)x+(m-1)y+m-2=0$$
$$mx+(2m+3)y+m+6=0$$

۴۰. مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که خط $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ از نقطه‌ی $A\left(\frac{3}{2},2\right)$ گذشته و با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۶ واحد بسازد. $(m\ ,n>0)$.

۴۱. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A\ (1,2)$ گذشته و فاصله‌ی آن تا مبدأ مختصات برابر ۱ باشد.

۴۲. قطرهای یک لوزی یک‌دیگر را در نقطه‌ی $M\ (5,1)$ قطع کرده‌اند. معادله‌ی یکی از قطرها $y=x-4$ و معادله‌ی یکی از اضلاع $3y=x+6$ است. مختصات رئوس لوزی را پیدا کنید.

۴۳. طول ضلع مربعی برابر $۴\sqrt{۲}$ است. مطلوبست معادله‌ی هر ضلع و هر قطر آن به شرطی که یکی از رأس‌های آن بر مبدأ مختصات قرار داشته باشد و یکی از قطرهای آن بر جهت مثبت محور عرض منطبق شود.

۴۴. معادله‌ی دو ضلع لوزی $ABCD$ و قطر AC به‌صورت زیر است.

$AC: y = x + ۲$ و $BC: x + ۲y = ۴$ و $AD: x + ۲y = ۱۰$

مختصات رئوس لوزی را تعیین کنید.

۴۵. نقاط $B\ (۰,۱)$ و $C\ (-۱,۰)$ رأس‌های مثلث متساوی‌الساقین به رأس A می‌باشند. در صورتی‌که طول ساق مثلث $\sqrt{۵}$ باشد، مختصات A را به‌دست آورید.

۴۶.دو خط $۳x - ۴y - ۱ = ۰$ و $۸y - ۶x + ۱۷ = ۰$ بر یک دایره مماسند. مساحت دایره را حساب کنید.

۴۷. نشان دهید سه خط زیر از یک نقطه می‌گذرند.

$۵x - ۴y = ۱۱ \qquad ۷x - ۲y = ۱۹ \qquad ۲x + ۳y = ۹$

۴۸. مقدار m را طوری تعیین کنید که سه خط زیر در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند.

$y = ۳mx + ۲ - m \qquad y = ۲mx + ۱ - m \qquad y = mx + m - ۲$

۴۹. معادله‌ی دو ضلع مستطیلی عبارتند از $۳x + ۲y - ۷ = ۰$ و $۲x - ۳y + ۵ = ۰$. اگر $A\ (۲,-۳)$ یکی از رأس‌های آن باشد، معادله‌ی دو ضلع دیگر مستطیل را پیدا کنید.

۵۰. $x - ۲y = ۰$ و $x - ۲y + ۱۵ = ۰$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل و $۷x + y - ۱۵ = ۰$ معادله‌ی یکی از قطرهای آن است. مختصات رئوس مستطیل را پیدا کنید.

۵۱.مقدار m را چنان تعیین کنید که دو خط $(m + ۵)x + (m - ۱)y = ۵$ و $۳x - ۲y + ۱۰ = ۰$:

اولاً: موازی

ثانیاً: منطبق

ثالثاً: بر هم عمود باشند.

۵۲. مقدار m را چنان تعیین کنید که خط $m(x + y - ۲) + (x + ۲y - ۸) = ۰$ با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۲ بسازد.

۵۳. m و n را طوری تعیین کنید که خط:

$$(m+۲n-۳)x+(m-n+۱)y+۶m+۹=۰$$

با محور xها موازی بوده و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع کند.

۵۴. فاصله‌ی دو خط $۶x-۸y+۵=۰$ و $۳x-۴y-۱۰=۰$ را تعیین کنید.

۵۵. مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی $A\,(۲,۳)$ را نسبت به خط $x+y=۳$ تعیین کنید.

۵۶. اگر $A\,(۲,-۱)$ و $B\,(-۱,۳)$ دو رأس مربع $ABCD$ باشند، مختصات رأس‌های C و D را تعیین کنید.

۵۷. معادلات دو ارتفاع مثلث ABC به‌صورت $۳y+۲x+۲=۰$ و $۴y=x-۴$ می‌باشند. اگر $B\,(۰,-۴)$ یک رأس آن باشد، مختصات دو رأس دیگر مثلث را به‌دست آورید.

۵۸. قرینه‌ی خط $۲x+y=۳$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم چیست؟

۵۹. معادله‌ی خطی را بنویسید که در نقطه‌ای به طول ۲ متعلق به خط $۳x+۲y=۰$ بر همین خط عمود شود.

۶۰. مقدار a را به قسمی تعیین کنید که دو خط $(۲a-۳)x-y=۲$ و $x-۳y=۲$ روی محور طول یک‌دیگر را قطع کنند.

۶۱. مقدار a را طوری تعیین کنید که سه خط زیر در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند.

$$D_۱:(a-۱)x+ay+۱=۰ \quad D_۲:y=(۳a+۱)x \quad D_۳:ax+(۱-a)y-۱=۰$$

۶۲. اگر $A\,(-۱,۴)$ و $B\,(۳,۱)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند:

اولاً: معادله‌ی قطرهای مربع را بنویسید.

ثانیاً: مختصات دو رأس دیگر را پیدا کنید.

۶۳. مثلث متساوی‌الساقین ABC در رأس A قائمه است. $A\,(۳,۱)$ و $B\,(۰,۳)$ می‌باشند. مختصات رأس C را به‌دست آورید.

۶۴. در یک لوزی، طول یکی از اضلاع $\sqrt{۵}$ و نقاط $A\,(-۱,۳)$ و $C\,(-۲,۴)$ دو سر یک قطر آن هستند. مختصات دو رأس دیگر آن‌را پیدا کنید.

۶۵. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $P\,(-۲,۳)$ گذشته و از دو نقطه‌ی $A\,(۵,-۱)$ و $B\,(۳,۷)$ به یک فاصله باشد.

۶۶. در مثلث ABC نقاط M و N به‌ترتیب اوساط اضلاع AC و AB می‌باشند. معادلات BM و CN به‌ترتیب عبارتند از $5x - 4y = 29$ و $2x + 5y + 6 = 0$. اگر $A(3,2)$ باشد، مختصات رئوس B و C را بیابید.

۶۷. معادلات ضلع BC، ارتفاع CH و ارتفاع BK در مثلث ABC به ترتیب به‌صورت $x + 3y - 4 = 0$ و $y = x - 4$ و $y = 2x - 1$ می‌باشند.

اولاً: معادله‌ی میانه‌ی AM را بنویسید.

ثانیاً: مساحت مثلث را حساب کنید.

۶۸. دو نقطه روی خط $5x - 12y + 15 = 0$ بیابید که فاصله‌ی آن‌ها از خط $3x + 4y = 27$ برابر ۴ واحد باشد.

۶۹. نقاط $A(3,1)$ و $B(1,-3)$ دو رأس از مثلث ABC می‌باشند که مساحت آن ۳ واحد سطح و رأس C روی محور عرض است. مختصات نقطه‌ی C را تعیین کنید.

۷۰. نقاط $A(3,-1)$ و $B(5,5)$ دو رأس از مثلث ABC و $H(6,2)$ نقطه‌ی برخورد ارتفاع‌های آن است. مختصات رأس سوم مثلث را بیابید.

۷۱. خط راستی از مبدأ مختصات گذشته و طول پاره‌خطی از آن که بین دو خط $2x - y + 5 = 0$ و $2x - y + 10 = 0$ واقع شده است برابر $\sqrt{10}$ است. معادله‌ی این خط را بنویسید.

۷۲. معادله‌ی ارتفاع BH و میانه ی CM از مثلث ABC به‌ترتیب $3x + y + 11 = 0$ و $x + 2y + 7 = 0$ می‌باشند. اگر $A(2,-7)$ یک رأس آن باشد، معادله‌ی اضلاع مثلث را بنویسید.

۷۳. معادله‌ی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی $3x - 7y = 20$ و $C(7,-4)$ یکی از رأس‌های مثلث است. معادله‌ی دو ضلع دیگر مثلث را بنویسید.

۷۴. معادله‌ی خطوطی را بنویسید که موازی خط $12x - 5y = 15$ بوده و به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از آن قرار داشته باشند.

۷۵. مساحت یک مثلث ۳ سانتی‌متر مربع و دو رأس آن $A(3,1)$ و $B(1,-3)$ می‌باشند و مرکز ثقل مثلث روی محور طول است. مختصات نقطه‌ی C را پیدا کنید.

۷۶. نقطه‌ی $A(5,3)$ یکی از رئوس مثلث ABC و خطوط $y=-x+3$ و $y=x+1$ میانه‌های BB' و CC' از این مثلث می‌باشند. مختصات دو رأس B و C را به‌دست آورید.

۷۷. معادله‌ی عمومی قطرهای دایره‌ای به‌صورت $(3m^2+m-15)x+(1-2m)y=0$ می‌باشد.

اولاً: مختصات مرکز دایره را پیدا کنید.

ثانیاً: اگر این دایره بر خط $3x-4y=10$ مماس باشد، اندازه‌ی شعاع دایره را حساب کنید.

۷۸. معادله‌ی خطی را بنویسید که با هر یک از دو خط زیر موازی باشد و در ضمن از آن‌ها به یک فاصله باشد.

$4x+6y+17=0$ $\qquad$ $2x+3y-6=0$

۷۹. مساحت مثلثی ۸ واحد مربع و $A(1,-2)$ و $B(2,3)$ دو رأس آن می‌باشند. اگر رأس C روی خط $2x+y-2=0$ قرار داشته باشد، مختصات آن‌را تعیین کنید.

۸۰. معادله‌ی قطرهای دایره‌ای در حالت کلی به‌صورت زیر است.

$$(m+n-1)x+(m-n+3)y+n-3m-5=0$$

اولاً: مختصات مرکز دایره را تعیین کنید.

ثانیاً: معادله‌ی مماس بر دایره را در نقطه‌ی $A(-2,3)$ واقع بر دایره بنویسید.

ثالثاً: قطری را مشخص کنید که بر نیمساز ناحیه‌ی اول عمود باشد.

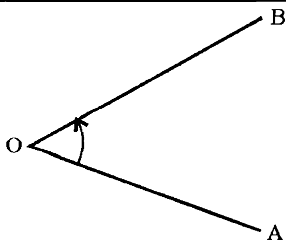
فصل یازدهم

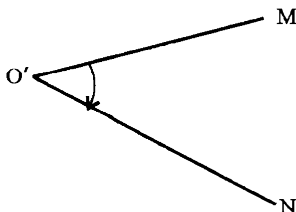
مثلثات

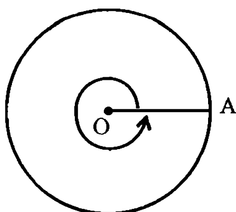
موضوع این بخش از ریاضیات بررسی روابط بین اضلاع و زوایا در یک مثلث می‌باشد. یکی از اهداف این بخش یافتن فرمول‌هایی است که بتوان فاصله‌ها را به صورتی غیرمستقیم محاسبه کرد. مثلثات کاربرد وسیعی در نقشه‌برداری، دریانوردی، علوم مهندسی، فیزیک و نجوم دارد. مهندسین نقشه‌بردار با استفاده از مترهای فلزی و دستگاه‌های زاویه‌یاب به ترتیب فواصل و زوایا را اندازه‌گیری می‌کنند. سپس با استفاده از مثلثات فواصل و زوایای دیگر را محاسبه می‌کنند. بدین ترتیب آن‌ها می‌توانند برای ساختمان‌های گوناگون، نقشه‌ها و مشخصات لازم را تهیه نمایند. بدون مثلثات، نقشه‌برداری و دریانوردی با اشکال‌های عمده مواجه می‌شدند و سؤال‌های اساسی مانند فواصل بین زمین و خورشید و ماه و ستارگان دیگر بدون پاسخ می‌ماند.

☆ زاویه

از دَوَران یک نیم‌خط حول رأسش ناحیه‌ای پدید می‌آید که زاویه نامیده می‌شود. این دَوَران ممکن است در جهت و یا خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. در مثلثات جهت مثلثاتی خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد و قرارداد شده که زوایایی که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شوند مثبت و زوایایی که در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شوند منفی باشند. در زیر زوایای $A\widehat{O}B$ (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) و $M\widehat{O'}N$ (هم‌جهت با حرکت عقربه‌های ساعت) دیده می‌شوند.







اگر نیم‌خط Ox حـول رأس (یعنـی O) در یکـی از دو جهت چنان دوران کند تا دوباره بر نقطه شـروع منطبق شود گوییم یک دوران کامل انجام شـده. از دوران کامل پاره‌خـط OA حـول نقطـه‌ی O، یـک دایره پدید می‌آید.

☆ واحدهای اندازه‌گیری زاویه

سه واحد اصلی در مثلثات برای اندازه‌گیری زاویه‌ها کاربرد دارند کـه عبارتنـد از درجـه، گـراد و رادیان که ذیلاً به آن‌ها اشاره می‌شود.

☆ تعریف درجه

اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک درجه مـی‌نامنـد. به عبارتی $\frac{۱}{۳۶۰}$ دوران کامل، زاویه‌ای به اندازه‌ی یک درجه پدید می‌آورد. برای نمایش درجه از علامت «°» استفاده می‌شود. لذا می‌توان گفت:

$$۱^\circ = \frac{۱}{۳۶۰} \times \text{محیط دایره}$$

اجزاء درجه عبارتند از دقیقه و ثانیه. هر دقیقه $\frac{۱}{۶۰}$ درجه و هر ثانیـه $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقـه اسـت. اگـر اندازه‌ی زاویه‌ای ۳۷ درجه و ۲۵ دقیقه و ۱۵ ثانیه باشد، می‌نویسیم:

$$۳۷^\circ\ ,\ ۲۵'\ ,\ ۱۵''$$

مثال ۱ : عبارت $(۳۷^\circ, ۲۵', ۱۵'')$ را فقط برحسب دقیقه بنویسید.

✎ **حل:**

$$(۳۷^\circ,۲۵',۱۵'') = ۳۷\times۶۰+۲۵+\frac{۱۵}{۶۰} = ۲۸۲۰+۲۵+\frac{۱}{۴} = \left(\frac{۱۱۳۸۱}{۴}\right)$$

☆ تعریف گراد

اگر محیط یک دایره را به ۴۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک گراد می‌نامند. به عبارتی $\frac{۱}{۴۰۰}$ دَوَران کامل، زاویه‌ای به اندازه‌ی یک گراد پدید می‌آورد. برای نمایش گراد از علامت «gr» استفاده می‌شود. لذا می‌توان گفت:

$$۱gr = \frac{۱}{۴۰۰} \times \text{محیط دایره}$$

اجزاء گراد عبارتند از دسی‌گراد، سانتی‌گراد و میلی‌گراد که هر کدام به ترتیب $\frac{۱}{۱۰}$ گراد، $\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد و $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ گراد می‌باشند. مثلاً اگر اندازه‌ی زاویه‌ای ۳۷ گراد و ۲ دسی‌گراد و ۸ میلی‌گراد باشد می‌نویسیم: ۳۷/۲۰۸ گراد.

☆ تعریف رادیان

دایره‌ای به شعاع l را درنظر بگیرید. می‌دانیم محیط این دایره $۲\pi l$ است. یک رادیان بنا به تعریف اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمانی از دایره است که طول آن کمان برابر شعاع دایره باشد. برای نمایش رادیان از کلمه «rad» استفاده می‌شود. بنابراین محیط هر دایره برحسب رادیان ۲π رادیان است و لذا:

$$۱rad = \frac{۱}{۲\pi} \times \text{محیط دایره}$$

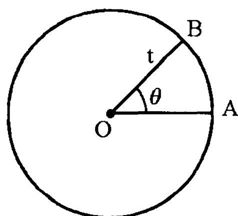
مثال ۲ : اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمانی از دایره که طول آن کمان $\frac{۱}{۶}$ محیط دایره است، چند رادیان است؟

حل:

با یک تناسب ساده داریم:

طول کمان	اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان
$۲\pi l$	۲π
$\frac{۱}{۶} \times ۲\pi l$	$x = \frac{\frac{۱}{۶} \times ۲\pi l \times ۲\pi}{۲\pi l} = \frac{\pi}{۳} rad$

تبدیل واحدهای اندازه‌گیری



دایره‌ای به شعاع l و زاویه‌ی $AOB = \theta$ در این دایره را درنظر بگیرید. فرض کنید اندازه‌ی زاویه‌ی θ برحسب درجه D برحسب گراد G و برحسب رادیان R باشد. خواهیم داشت:

۱)

اندازه‌ی زاویه برحسب درجه	طول کمان
۳۶۰°	$۲\pi l$
D	$\widehat{AB}$

$$\Rightarrow AB = \frac{۲\pi l D}{۳۶۰} = \frac{\pi l D}{۱۸۰}$$

۲)

اندازه‌ی زاویه برحسب گراد	طول کمان
۴۰۰°	$۲\pi l$
G	$\widehat{AB}$

$$\Rightarrow AB = \frac{۲\pi l G}{۴۰۰} = \frac{\pi l G}{۲۰۰}$$

۳)

اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان	طول کمان
۲π	$۲\pi l$
R	$\widehat{AB}$

$$\Rightarrow AB = \frac{۲\pi l R}{۲\pi} = l\,R$$

چون طول کمان AB مقداری ثابت است، خواهیم داشت:

$$\frac{۲\pi l D}{۱۸۰} = \frac{۲\pi l G}{۲۰۰} = l\,R$$

و یا:

$$\boxed{\frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}}$$

مثال ۳ : اندازه‌ی زاویه‌ای ۲۰ گراد است. اندازه‌ی این زاویه برحسب درجه و رادیان چیست؟

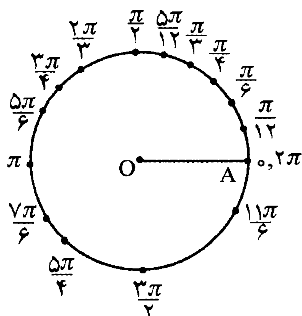
✎ حل:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Rightarrow\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}\Rightarrow\frac{D}{۹}=\frac{۲۰}{۱۰}\Rightarrow D=۱۸^\circ$$

$$\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۲۰}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{۱۰}$$

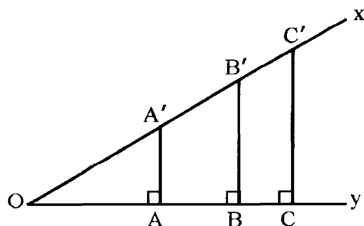
مثال ۴ : در جدول زیر اندازه‌ی برخی از زاویه‌ها برحسب درجه و رادیان نوشته شده است.

درجه	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۱۰	۲۲۵	۲۷۰	۳۳۰	۳۶۰
رادیان	۰	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π



همچنین در یک دوران کامل این زاویه‌ها بر محیط دایره با فرض این که پاره‌خط OA حول نقطه‌ی O در جهت مثلثاتی حرکت کرده مشخص شده‌اند.

☆ تعریف نسبت‌های مثلثاتی زاویه

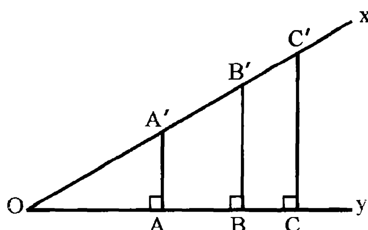


زاویه‌ی $x\hat{o}y$ را در شکل مقابل درنظر بگیرید. نقاط A و B و C را روی oy اختیار کرده و عمودهایی بر همان ضلع رسم می‌کنیم تا ضلع ox را در نقاط A' و B' و C' قطع کنند.

$$\overset{\triangle}{OAA'}\sim\overset{\triangle}{OBB'}\Rightarrow\frac{AA'}{BB'}=\frac{OA}{OB}\Rightarrow\frac{AA'}{OA}=\frac{BB'}{OB}\quad(۱)$$

$$\overset{\triangle}{OAA'}\sim\overset{\triangle}{OCC'}\Rightarrow\frac{AA'}{CC'}=\frac{OA}{OC}\Rightarrow\frac{AA'}{OA}=\frac{CC'}{OC}\quad(۲)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) ملاحظه می‌کنیم نسبت‌های $\frac{AA'}{OA}$ و $\frac{BB'}{OB}$ و $\frac{CC'}{OC}$ با هم برابر و مقدار ثابتی می‌باشند که این مقدار ثابت را تانژانت زاویه‌ی O می‌نامیم و آن‌را به صورت $\tan\widehat{O}$ نشان می‌دهیم.



به همین ترتیب می‌توان گفت $\frac{OA}{AA'}=\frac{OB}{BB'}=\frac{OC}{CC'}$ که این مقدار ثابت را کتانژانت زاویه‌ی O نامیده و آن‌را به صورت $\cot\widehat{O}$ نشان می‌دهیم.

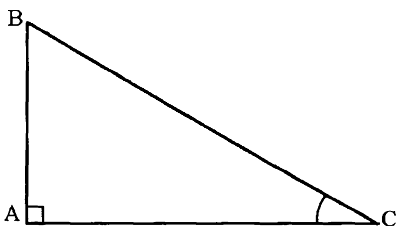
برای تعریف سینوس یک زاویه و کسینوس همان زاویه شکل روبه‌رو را درنظر بگیرید.

$$\overset{\triangle}{OAA'} \sim \overset{\triangle}{OBB'} \Rightarrow \frac{AA'}{BB'}=\frac{OA'}{OB'} \Rightarrow \frac{AA'}{OA'}=\frac{BB'}{OB'} \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{OAA'} \sim \overset{\triangle}{OCC'} \Rightarrow \frac{AA'}{CC'}=\frac{OA'}{OC'} \Rightarrow \frac{AA'}{OA'}=\frac{CC'}{OC'} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{AA'}{OA'}=\frac{BB'}{OB'}=\frac{CC'}{OC'}$$

سه نسبت فوق که با هم برابر و مقداری ثابت می‌باشند سینوس زاویه‌ی O نامیده می‌شوند و آن‌را به صورت $\sin\widehat{O}$ نشان می‌دهیم.



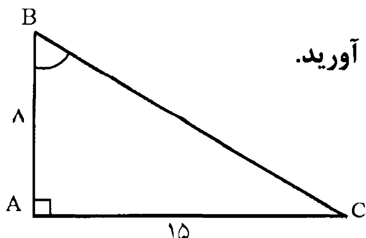
به همین ترتیب می‌توان گفت نسبت‌های $\frac{OA}{OA'}$ و $\frac{OB}{OB'}$ و $\frac{OC}{OC'}$ با هم برابرند که این نسبت را کسینوس زاویه‌ی O نامیده و آن‌را به صورت $\cos\widehat{O}$ نشان می‌دهیم.

به طور خلاصه در مثلث قائم‌الزاویه نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sin C=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{AB}{BC} \qquad \cos C=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{AC}{BC}$$

$$\tan C=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{AB}{AC} \qquad \cot C=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}=\frac{AC}{AB}$$

نکته: با توجه به این‌که وتر مثلث از اضلاع دیگر بزرگ‌تر است می‌توان گفت سینوس و کسینوس $\widehat{C}$ کوچک‌تر از واحد می‌باشند.



مثال ۵ : در شکل زیر نسبت‌های مثلثاتی $\widehat{B}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$BC = \sqrt{۸^۲ + ۱۵^۲} = \sqrt{۶۴ + ۲۲۵} = \sqrt{۲۸۹} = ۱۷$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{۱۵}{۱۷} \qquad \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{۸}{۱۷}$$

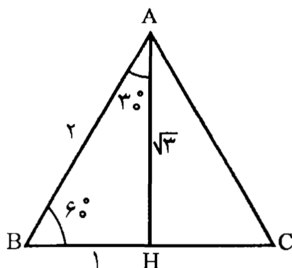
$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{۱۵}{۸} \qquad \cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{۸}{۱۵}$$

مثال ۶ : نسبت‌های مثلثاتی زوایای °۳۰ و °۶۰ را حساب کنید.

حل:

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۲ سانتی‌متر (یا هر اندازه‌ی دیگر) را درنظر می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع، نیمساز و میانه نیز می‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABH}$ داریم:

$$AB = ۲ \ , \ BH = ۱ \ , \ AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ = ۴ - ۱ = ۳ \Rightarrow AH = \sqrt{۳}$$

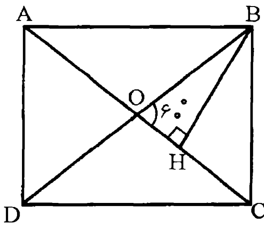


$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{۱}{۲} = \cos ۶۰^\circ$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin ۶۰^\circ$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \cot ۶۰^\circ$$

$$\cot ۳۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳} = \tan ۶۰^\circ$$



مثال ۷ : طول قطر مستطیل ۸ سانتی‌متر و زاویه حاده بین دو قطر آن ۶۰° است. مساحت مستطیل چند سانتی‌متر مربع است؟

حل:

مستطیل $ABCD$ را رسم می‌کنیم. فرض کنیم O محل برخورد دو قطر باشد. از B عمود BH را بر قطر AC فرود می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه OBH، داریم:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۴} \Rightarrow \boxed{BH = ۲\sqrt{۳}}$$

مساحت مستطیل $ABCD$ دو برابر مساحت $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

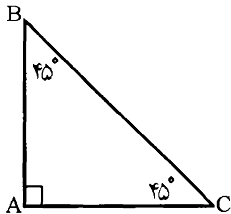
$$S_{ABCD} = ۲ \times S\,\overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow ۲ \times \frac{AC \times BH}{۲} = ۸ \times ۲\sqrt{۳} = ۱۶\sqrt{۳}$$

مثال ۸ : نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۴۵° را محاسبه کنید.

حل:

مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ABC به اضلاع زاویه قائمه یک سانتی‌متر را درنظر می‌گیریم.

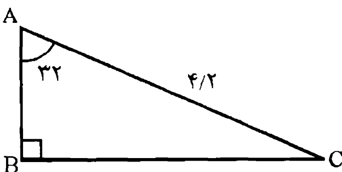
بدیهی است که: $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۲}\ ,\ \widehat{B} = \widehat{C} = ۴۵^\circ$



$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$tna\widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{۱}{۱} = ۱\ ,\ \cot \widehat{B} = ۱$$



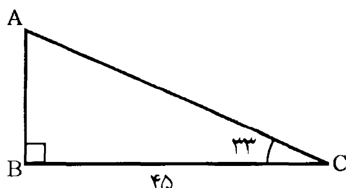
مثال ۹ : در شکل مقابل اندازه‌ی AB را حساب کنید. $(\sin ۵۸^\circ = ۰/۸۴۸)$

حل:

$$\widehat{A} = ۹۰ - ۳۲ = ۵۸$$

$$\sin C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow ۰/۸۴۸ = \frac{AB}{۴/۲} \Rightarrow AB = ۴/۲ \times ۰/۸۴۸ = ۳/۵۶$$

مثال ۱۰ : در شکل مقابل اندازه‌ی AB را حساب کنید. $(\cot ۵۷^\circ = ۰/۶۴۹۴)$



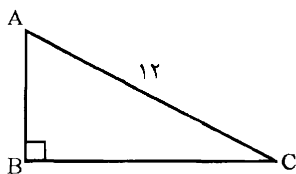
حل:

$$\widehat{A} = ۹۰ - ۳۳ = ۵۷$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} \Rightarrow ۰/۶۴۹۴ = \frac{AB}{۴۵} \Rightarrow AB = ۴۵ \times ۰/۶۴۹۴ = ۲۹/۲۲$$

مثال ۱۱ : طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۲ سانتی‌متر و سینوس یک زاویه ی آن $\frac{۲}{۳}$ اســت. محیط این مثلث را حساب کنید.

حل:



$$\sin \widehat{A} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{BC}{۱۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow BC = ۸$$

$$AB = \sqrt{۱۲^۲ - ۸^۲} = \sqrt{۶۰} = ۲\sqrt{۱۵}$$

محیط مثلث $۱۲ + ۸ + ۲\sqrt{۱۵} = ۲۰ + ۲\sqrt{۱۵}$

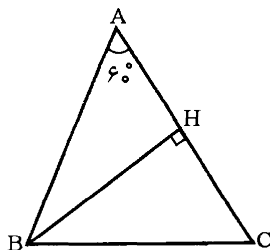
بدین ترتیب نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° (با معادل رادیـانی $\frac{\pi}{۶}$، $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۳}$) را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد.

نسبت مثلثاتی \ θ	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin\theta$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot\theta$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

مثال ۱۲ :مثلث ABC با مفروضات $\widehat{A}=۶۰^\circ$، $AB=۷$ و $AC=۱۲$ را درنظر بگیرید. مطلوب است طول BC

حل:

ارتفاع BH را رسم می‌کنیم.



$$\overset{\triangle}{ABH}:\cos ۶۰^\circ=\frac{AH}{AB}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{AH}{۷}\Rightarrow \boxed{AH=\frac{۷}{۲}}$$

$$BH^۲=AB^۲-AH^۲=۴۹-\frac{۴۹}{۴}=\frac{۳\times۴۹}{۴}$$

$$\Rightarrow \boxed{BH=\frac{۷\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$CH=AC-AH=۱۲-\frac{۷}{۲}=\frac{۱۷}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{BCH}:BC^۲=BH^۲+CH^۲=\frac{۱۴۷}{۴}+\frac{۲۸۹}{۴}=\frac{۴۳۶}{۴}=۱۰۹\Rightarrow BC=\sqrt{۱۰۹}$$

مثال ۱۳ :حاصل عبارت زیر چقدر است؟

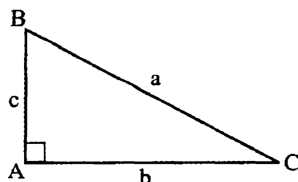
$$A=\frac{\sin ۳۰^\circ\cos ۶۰^\circ}{۱-\tan ۳۰^\circ\cot ۶۰^\circ}+\frac{۱+\sin^۲ ۶۰^\circ}{۲\tan^۲ ۳۰^\circ}-\frac{۲\sqrt{۳}\tan ۳۰^\circ}{۲-\sin^۲ ۶۰^\circ}$$

حل:

$$A=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}}+\frac{۱+\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}}{۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲}}-\frac{۲\sqrt{۳}\times\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)}{۲-\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۲}{۳}}+\frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{۲}{۳}}-\frac{۲}{\frac{۵}{۴}}=$$

$$\frac{۳}{۸}+\frac{۲۱}{۸}-\frac{۸}{۵}=۳-\frac{۸}{۵}=\frac{۷}{۵}$$

مثال ۱۴ :با توجه به شکل درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.



الف) $\sin B=\cos C$

ب) $\cos B=\sin C$

ج) $\tan B=\cot C$

د) $\cot B=\tan C$

حل:

الف) $\sin B=\frac{b}{a}=\cos C$

ب) $\cos B=\frac{c}{a}=\sin C$

ج) $\tan B=\frac{b}{c}=\cot C$

د) $\cot B=\frac{c}{b}=\tan C$

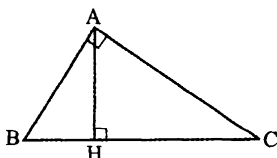
نکته: به طور کلی سینوس یک زاویه با کسینوس متمم آن زاویه مساوی است. به همین ترتیب تانژانت یک زاویه با کتانژانت متمم آن زاویه برابر است.

$$\sin(۹۰-\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(۹۰-\alpha)=\cot\alpha$$

مثال ۱۵ :در شکل زیر $\widehat{A}=۹۰^\circ$ است. به کمک نسبت‌های مثلثاتی ثابت کنید:

$$AH^{۲}=BH\times CH$$

حل:



$$\tan\widehat{B}=\frac{AH}{BH} \qquad \cot\widehat{C}=\frac{CH}{AH}$$

$$\widehat{B}+\widehat{C}=۹۰\Rightarrow\tan\widehat{B}=\cot\widehat{C}\Rightarrow\frac{AH}{BH}=\frac{CH}{AH}$$

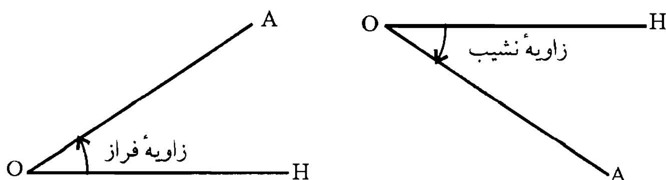
$$\Rightarrow AH^{۲}=BH\times CH$$

کاربرد حل مثلث قائم‌الزاویه در تعیین بلندی‌ها و فاصله‌ها

مقصود تعیین بلندی یک نقطه از سطح زمین و تعیین فاصله‌ی دو نقطه است که دسترسی به آن‌ها میسر نمی‌باشد.

برای این منظور زاویه‌ی فراز و زاویه‌ی نشیب را تعریف می‌کنیم.

زاویه‌ی فراز و زاویه‌ی نشیب: هرگاه چشم ناظر در نقطه‌ی O قرار گیرد و نقطه‌ی A را نگاه کند نیم‌خط OA با صفحه‌ی افقی (صفحه‌ی موازی سطح آب‌های ساکن کم‌وسعت) H که بر نقطه‌ی O می‌گذرد زاویه‌ای پدید می‌آورد. اگر نقطه‌ی A بالای صفحه‌ی افقی H باشد زاویه‌ی HOA زاویه‌ی فراز و در صورتی‌که نقطه‌ی A پایین صفحه‌ی افقی H باشد زاویه‌ی HOA را زاویه‌ی نشیب نقطه‌ی A از O می‌نامند.



مثال ۱۶: از نقطه‌ی O که از سطح زمین $۱/۲۴m$ ارتفاع دارد زاویه‌ی فراز بالاترین نقطه‌ی یک درخت ۳۲° است. فاصله‌ی O از درخت برابر با $۷/۱۴m$ می‌باشد. بلندی درخت را تعیین کنید. $(\tan ۳۲ = ۰/۶۲۲۹)$.

حل:

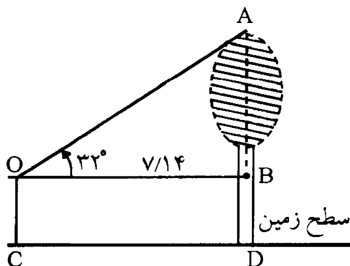
$$\text{بلندی درخت} = DB + BA = ۱/۲۴m + BA$$

برای تعیین BA در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBA می‌توان نوشت:

$$\tan ۳۲ = \frac{BA}{OB} \Rightarrow ۰/۶۲۲۹ = \frac{BA}{۷/۱۴}$$

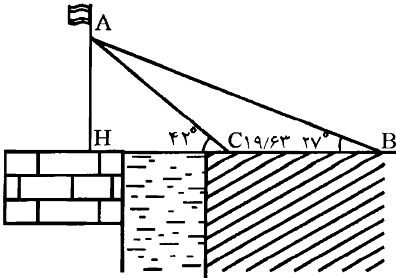
$$BA = ۷/۱۴ \times ۰/۶۲۲۹ = ۴/۴۴m$$

$$DA = ۱/۲۴ + ۴/۴۴ = ۵/۶۸m$$



مثال ۱۷ : از نقطه‌ی B زاویه‌ی فراز سربرجی (زاویه‌ی فراز بلندترین نقطه‌ی برج) ۲۷° است. با حرکت کردن به طرف برج و پیمودن مسافت $۱۹/۶۳m$ زاویه‌ی فراز همان نقطه از برج ۴۲° می‌شود. ارتفاع برج را تعیین کنید.
$(\cot ۲۷ = ۱/۹۶۲۶ \;,\; \cot ۴۲ = ۱/۱۱۰۶)$

✎ حل:



$HA = x =$ بلندی برج

چون $CB = ۱۹/۶۳m$ معلوم است، ابتدا هریک از دو فاصله‌ی HB و HC را برحسب طول مجهول x به دست آورده و تفاضل آن‌ها که برابر با مقدار داده شده‌ی CB است را می‌نویسیم:

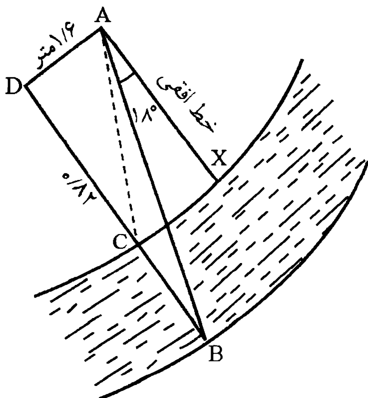
$$\overset{\triangle}{AHB} : HB = HA \times \cot \angle HBA = HA \cot ۲۷^\circ$$

$$\overset{\triangle}{AHC} : HC = HA \times \cot \angle HCA = HA \cot ۴۲^\circ$$

$$HB - HC = HA \cot ۲۷^\circ - HA \cot ۴۲^\circ = HA\,(\cot ۲۷^\circ - \cot ۴۲^\circ)$$

$$CB = HA\,(\cot ۲۷^\circ - \cot ۴۲^\circ) \Rightarrow HA = \frac{۱۹/۶۳}{۱/۹۶۲۶ - ۱/۱۱۰۶} = \frac{۱۹/۶۳}{۰/۸۵۳۰} = ۲۳/۰۳$$

مثال ۱۸ : برای تعیین عرض رودخانه‌ای دو نقطه‌ی B و C را در دو طرف ساحل آن درنظر گرفته و نقطه‌ی D را در روی امتداد BC و نزدیک رودخانه تعیین کرده‌ایم. از نقطه‌ی A که در امتداد خط شاقولی مرورکننده بر D و به فاصله ۱/۶۵ متر از آن واقع می‌باشد زاویه‌ی نشیب نقطه‌ی B برابر ۱۸° است. درصورتی که فاصله‌ی DC برابر با $۰/۸۲m$ باشد عرض رودخانه را به دست آورید.
$(\tan ۷۲ = ۳/۰۷۷۷)$



حل:

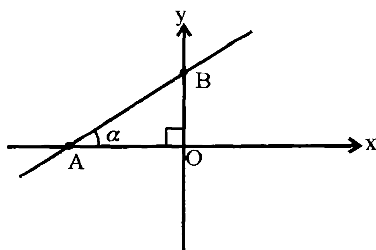
$B\widehat{A}D = ۹۰ - ۱۸ = ۷۲$

$\overset{\triangle}{ADB} : DB = DA \times \tan D\widehat{B}A = ۱/۶۵ \times \tan ۷۲$

$DB = ۱/۶۵ \times ۳/۰۷۷۷ = ۵/۰۵$

عرض رودخانه $= CB = DB - DC = ۵/۰۷ - ۰/۸۲ = ۴/۲۵$

☆ شیب خط و تانژانت زاویه



خطی به معادله‌ی $y = mx + d$ را درنظر بگیرید.

این خط در نقاط $B(۰,d)$ و $A(\frac{-d}{m},۰)$ محورهای عرض و طول را قطع می‌کند که نمودار آن با فرض $m > ۰$ به صورت زیر است:

$$\overset{\triangle}{OAB} : \tan\alpha = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|d|}{\left|\frac{-d}{m}\right|} = \left|\frac{d}{\frac{-d}{m}}\right| = |-m| = m$$

ملاحظه می‌شود شیب خط با تانژانت زاویه‌ای که محور Ox با خط می‌سازد برابر است.

مثال ۱۹: معادله‌ی خطی را بنویسید که با محور طول زاویه‌ی ۳۰° بسازد و از نقطه‌ی $A(\sqrt{۳},۳)$ بگذرد.

حل:

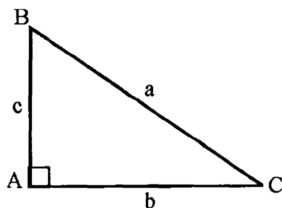
$m = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$y - ۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x - \sqrt{۳}) \Rightarrow ۳y - ۹ = \sqrt{۳}x - ۳$

$۳y = \sqrt{۳}x + ۶ \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + ۲$

مثال ۲۰ : با توجه به شکل درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$



ب) $\tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B}$

ج) $\cot B = \dfrac{\cos B}{\sin B}$

د) $\tan B \times \cot B = 1$

حل:

الف) $\sin^2 B + \cos^2 B = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{b^2 + c^2}{a^2} = \dfrac{a^2}{a^2} = 1$

ب) $\dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{b}{c} = \tan B$

ج) $\dfrac{\cos B}{\sin B} = \dfrac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \dfrac{c}{b} = \cot B$

د) $\tan B \times \cot B = \dfrac{b}{c} \times \dfrac{c}{b} = 1$

چهار اتحاد فوق اتحادهای اصلی مثلثاتی می‌باشند و همواره برقرارند.

مثال ۲۱ :اگر α زاویه‌ای حاده و $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را به کمک اتحادها حساب کنید.

حل:

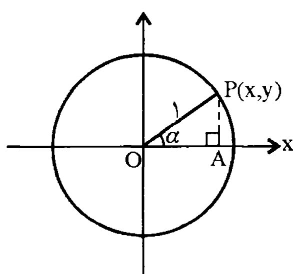
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{8}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}}=۲\sqrt{۲}$$

☆ نگاهی کامل‌تر به نسبت‌های مثلثاتی

تا اینجا نسبت مثلثاتی را در یک مثلث قائم‌الزاویه و برای زاویه‌های حاده تعریف کرده‌ایم. اما نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی قائمه، زاویه‌های منفی و زاویه‌های بزرگ‌تر از ۹۰° را تعریف نکرده‌ایم. برای این‌که تعریف جامعی از نسبت‌های مثلثاتی ارائه کنیم در صفحه‌ی مختصات دایره‌ای به شعاع یک به مرکز مبدأ مختصات رسم کرده و نقطه‌ی $P(x, y)$ را روی دایره اختیار می‌کنیم. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای که شعاع حامل op با نیم‌خط ox در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌سازد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.



$$\sin\alpha=\frac{y}{۱}=y$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{۱}=x$$

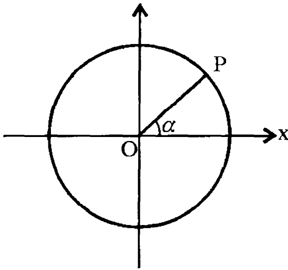
$$\tan\alpha=\frac{y}{x}$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}$$

با توجه به این‌که عرض نقطه‌ی P حداکثر یک و حداقل ۱− می‌باشد می‌توان گفت $-۱\le\sin\alpha\le ۱$ به همین ترتیب طول نقطه‌ی P نیز حداکثر یک و حداقل ۱− می‌باشد. پس $-۱\le\cos\alpha\le ۱$ و اما تانژانت و کتانژانت هر عددی می‌توانند باشند.

مثال ۲۲ : در شکل زیر شعاع دایره یک سانتی‌متر و $P(\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ نقطه‌ی دلخواه روی دایره است. نسبت‌های مثلثاتی α را تعیین کنید.

حل:



$$\cos\alpha = x_P = \frac{۱}{۲}$$

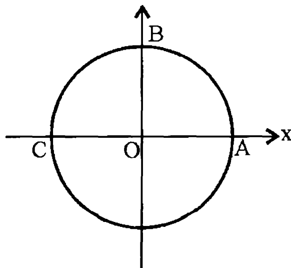
$$\sin\alpha = y_P = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

$$\cot\alpha = \frac{x_P}{y_P} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال ۲۳ : با توجه به شکل زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۹۰° و ۱۸۰° را حساب کنید.

حل:



$A\widehat{O}B = ۹۰^\circ \quad B(۰,۱)$

$\sin ۹۰ = y = ۱ \quad \cos ۹۰^\circ = x = ۰$

$\tan ۹۰ = \frac{y}{x} = \frac{۱}{۰}$ تعرف نشده

$\cot ۹۰^\circ = \frac{x}{y} = \frac{۰}{۱} = ۰$

$A\widehat{O}C = ۱۸۰^\circ \qquad C(-۱,۰)$

$\sin ۱۸۰ = y = ۰ \qquad \cos ۱۸۰ = x = -۱$

$\tan ۱۸۰ = \frac{y}{x} = \frac{۰}{-۱} = ۰ \quad \cot ۱۸۰ = \frac{x}{y} = \frac{-۱}{۰}$ تعریف نشده

مثال ۲۴ : نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۲۰° را حساب کنید.

حل:

$$B\widehat{O}P = ۱۲۰ - ۹۰ = ۳۰^\circ \Rightarrow PC = \frac{OP}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$OD = PC = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x_P = -\frac{۱}{۲}$$

$$OC = \sqrt{۱^۲ - (\frac{۱}{۲})^۲} = \sqrt{۱ - \frac{۱}{۴}} = \sqrt{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$y_P = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad P(-\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

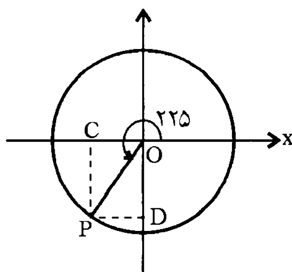
$$\sin ۱۲۰^\circ = y_P = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \cos ۱۲۰^\circ = x_p = \frac{-۱}{۲}$$

$$\tan ۱۲۰^\circ = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = -\sqrt{۳} \qquad \cot ۱۲۰^\circ = \frac{x_P}{y_P} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

همان‌طوری‌که از حل مثال فوق ملاحظه می‌کنیم اگر زاویه‌ای بین ۹۰° و ۱۸۰° باشد سینوس آن مثبت و سایر نسبت‌های مثلثاتی آن منفی می‌شوند.

مثال ۲۵ : نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۲۲۵° را به‌دست آورید.

حل:



$$\left.\begin{array}{l} C\widehat{O}P = ۴۵^\circ \\ OP = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow OC = CP = OD = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$x_P = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad y_P = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$P(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$\sin 225^\circ = y_P = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 225^\circ = x_P = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 225^\circ = \frac{y_P}{x_P} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \qquad \cot 225^\circ = \frac{x_P}{y_P} = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

ملاحظه می‌شود اگر زاویه‌ای بین 180° و 270° باشد سینوس و کسینوس آن منفی و تانژانت و کتانژانت آن مثبت می‌باشند.

به طور کلی علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه به صورت زیر است.

α	0°		90°		180°		270°		360°
$\sin\alpha$	۰	+	۱	+	۰	−	−۱	−	۰
$\cos\alpha$	۱	+	۰	−	−۱	−	۰	+	۱
$\tan\alpha$	۰	+	نامعین	−	۰	+	نامعین	−	۰
$\cot\alpha$	نامعین	+	۰	−	نامعین	+	۰	−	نامعین

مثال ۲۶ :اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را تعیین کنید.

حل:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$$

مثال ۲۷ : ماکزیمم و مینیمم عبارت $A = 1 - 2\cos\alpha$ را حساب کنید.

حل:

$\max A = ۱ - ۲ \times (-۱) = ۱ + ۲ = ۳$

$\min A = ۱ - ۲ \times ۱ = ۱ - ۲ = -۱$

☆ اتحادهای مثلثاتی

در شکل زیر دایره‌ای به شعاع یک به مرکز O رسم شده است.

$$PH^{۲} + OH^{۲} = OP^{۲}$$

$$y^{۲} + x^{۲} = ۱$$

$$(\sin\alpha)^{۲} + (\cos\alpha)^{۲} = ۱ \Rightarrow \sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\alpha \neq \frac{(۲k+۱)\pi}{۲})$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq k\pi)$$

$$\tan\alpha \times \cot\alpha = \frac{y}{x} \times \frac{x}{y} = ۱$$

مثال ۲۸ : اگر $k \in \mathbb{Z}$ و $\alpha \neq k\pi$، ثابت کنید: $۱ + \cot^{۲}\alpha = \frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$.

حل:

$$۱ + \cot^{۲}\alpha = ۱ + \frac{\cos^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha} = \frac{\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha} = \frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$$

مثال ۲۹ : اگر $k \in \mathbb{Z}$ و $\alpha \neq \frac{(۲k+۱)\pi}{۲}$، ثابت کنید $۱ + \tan^{۲}\alpha = \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$.

حل:

$$۱ + \tan^{۲}\alpha = ۱ + \frac{\sin^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha} = \frac{\cos^{۲}\alpha + \sin^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha} = \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$$

مثال ۳۰ : ثابت کنید $\sin^{۴}\alpha + \cos^{۴}\alpha = ۱ - ۲\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha$.

حل:

$$\sin^{4}\alpha+\cos^{4}\alpha=\left(\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha\right)^{2}-2\sin^{2}\alpha\cos^{2}\alpha=1-2\sin^{2}\alpha\cos^{2}\alpha$$

مثال ۳۱ : ثابت کنید $\sin^{6}\alpha+\cos^{6}\alpha=1-3\sin^{2}\alpha\cos^{2}\alpha$.

حل:

$$\sin^{6}\alpha+\cos^{6}\alpha=\left(\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha\right)^{3}-3\sin^{2}\alpha\cos^{2}\alpha\left(\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha\right)=$$

$$1^{3}-3\sin^{2}\alpha\cos^{2}\alpha\times1=1-3\sin^{2}\alpha\cos^{2}\alpha$$

مثال ۳۲ : اگر $\tan\alpha=\sqrt{3}$ و $180^\circ\le\alpha<270^\circ$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را تعیین کنید.

حل:

اگر α زاویه‌ای بین 180° و 270° باشد سینوس و کسینوس زاویه منفی و تانژانت و کتانژانت زاویه مثبت می‌باشند.

$$\tan\alpha=\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \cot\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1+\tan^{2}\alpha=\frac{1}{\cos^{2}\alpha}\ \Rightarrow\ 1+3=\frac{1}{\cos^{2}\alpha}\ \Rightarrow\ 4=\frac{1}{\cos^{2}\alpha}\ \Rightarrow$$

$$\cos^{2}\alpha=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^{2}\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{4}}=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال ۳۳ : ثابت کنید: $\tan x+\cot x=\frac{1}{\sin x\cos x}$.

حل:

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^{2}x+\cos^{2}x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

مثال ۳۴ : ثابت کنید: $\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

حل:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}=\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$=\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

مثال ۳۵ : ثابت کنید: $\frac{1}{\cos^2 y}+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}+\tan^2 y$.

حل:

$$\frac{1}{\cos^2 x}+\tan^2 y=\left(1+\tan^2 x\right)+\left(\frac{1}{\cos^2 y}-1\right)=\tan^2 x+\frac{1}{\cos^2 y}$$

مثال ۳۶ : ثابت کنید: $\frac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}=\tan x.\tan y$.

حل:

$$\frac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}=\frac{\tan x+\tan y}{\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}}=\frac{\tan x+\tan y}{\frac{\tan x+\tan y}{\tan x\tan y}}=$$
$$\frac{(\tan x+\tan y)\tan x.\tan y}{(\tan x+\tan y)}=\tan x.\tan y$$

مثال ۳۷ : حدود زاویه‌ی θ را چنان تعیین کنید که تساوی زیر درست باشد.

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta$$

حل:

اگر $\cos\theta>0$ باشد تساوی فوق درست است. این در صورتی است که $0<\theta<90$ یا $270<\theta<360$ باشد.

و:
$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{\sqrt{(1-\sin\theta)^2}}{\sqrt{\cos^2\theta}}=\frac{|1-\sin\theta|}{|\cos\theta|}=\frac{1-\sin\theta}{|\cos\theta|}\ \overset{\cos\theta>0}{=\!=}\ \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta$$

مثال ۳۸ : اگر $\cot x=-\frac{1}{3}$، حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{\frac{2}{3}\cos x-\frac{1}{2}\sin x}{3\sin x-3\cos x}$$

حل:

صورت و مخرج کسر را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\frac{2}{3}\cos x-\frac{1}{2}\sin x}{3\sin x-3\cos x}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{2}\times\frac{\sin x}{\sin x}}{\frac{3\sin x}{\sin x}-\frac{3\cos x}{\sin x}}=\frac{\frac{2}{3}\cot x-\frac{1}{2}}{3-3\cot x}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}}{3-3\times\frac{-1}{3}}=\frac{\frac{-2}{9}-\frac{1}{2}}{3+1}=\frac{\frac{-13}{18}}{4}=\frac{-13}{72}$$

مثال ۳۹ : اگر $\tan x=\sqrt{\frac{a}{b}}$ و $\cos x=\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ باشد بین a و b چه رابطه‌ای برقرار است؟

حل:

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 1+\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{a}{a+b}}$$

$$\frac{b+a}{b}=\frac{a+b}{a}\Rightarrow a=b$$

مثال ۴۰ : ماکزیمم و مینیمم عبارت مقابل را حساب کنید. $A=\sin^2 x-\sin x+1$

حل:

$$A=\sin^{۲}x-\sin x+\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=\left(\sin x-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+\frac{۳}{۴}$$

اگر $\sin x=-۱$ باشد ماکزیمم A به‌دست می‌آید. اگر $\sin x=\frac{۱}{۲}$ باشد کم‌ترین مقدار A به‌دست می‌آید.

$$\max A=(-۱-\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۴}+\frac{۳}{۴}=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

$$\min A=(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

مثال ۴۱ :در دستگاه زیر رابطه‌ای مستقل از x بین a و b پیدا کنید.

$$\begin{cases}\tan x+\dfrac{۱}{\cos x}=a\\ \dfrac{۱}{\cos x}-\tan x=b\end{cases}$$

حل:

از جمع طرفین دو تساوی داریم:

$$\frac{۲}{\cos x}=a+b\Rightarrow\frac{۱}{\cos x}=\frac{a+b}{۲}\qquad(۱)$$

با قرار دادن در معادله‌ی اول دستگاه خواهیم داشت:

$$\tan x+\frac{a+b}{۲}=a\Rightarrow\tan x=\frac{a-b}{۲}\ (۲)$$

با استفاده از اتحاد $۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$:

$$۱+\left(\frac{a-b}{۲}\right)^{۲}=\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲}$$

$$۱+\frac{a^{۲}+b^{۲}-۲ab}{۴}=\frac{a^{۲}+b^{۲}+۲ab}{۴}$$

$$۴+a^{۲}+b^{۲}-۲ab=a^{۲}+b^{۲}+۲ab$$

$$۴=۴ab\Rightarrow ab=۱$$

مثال ۴۲ : رابطه‌ای مستقل از x بین a و b در دستگاه زیر پیدا کنید.

$$\begin{cases} \tan^2 x+\cot^2 x=a \\ \tan^4 x+\cot^4 x=b \end{cases}$$

حل:

$$\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)^2=a^2 \Rightarrow \tan^4 x+\cot^4 x+2=a^2$$

$$b+2=a^2$$

☆ سکانت و کُسکانت یک زاویه

اگر $a \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k \in Z)$ باشد وارون $\cos\alpha$ را سکانت α نامیده و با نماد $\sec\alpha$ نشان می‌دهند. پس:

$$\boxed{\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}}$$

همچنین اگر $a \neq k\pi$ $(k \in Z)$ باشد وارون $\sin\alpha$ را کُسکانت α نامیده و با نماد $cosec\,\alpha$ یا مختصراً $\csc\alpha$ نشان می‌دهند. پس:

$$\boxed{\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}}$$

مثال ۴۳ : حاصل $\sec^2\frac{\pi}{6}\times\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)+\csc^2\frac{\pi}{6}\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)$ چقدر است؟

حل:

$$\sec\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۶}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

با جای‌گذاری داریم:

$$\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)^۲\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)+۲^۲\left(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\frac{۴}{۳}\times\frac{۱}{۲}+۴\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲}{۳}+۴+۲\sqrt{۳}=\frac{۱۴+۶\sqrt{۳}}{۳}$$

تمرین‌های فصل یازدهم

۱. زاویه‌های ۱۳۵°، ۲۱۰°، ۲۷۰° و ۳۳۰° را برحسب رادیان به‌دست آورید.

۲. زاویه‌های $\frac{۵\pi}{۶}$، $\frac{۴\pi}{۳}$، $\frac{۱۱\pi}{۶}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$ را برحسب درجه به‌دست آورید.

۳. در مثلث ABC اگر $\widehat{C} = ۹۰^\circ$ و $\sin A = \frac{۲۱}{۴۳}$ و $AB = ۱۲/۴۵m$ باشد، اندازه‌ی ضلع BC را حساب کنید.

۴. در مثلث ABC، $\widehat{C} = ۹۰^\circ$، $AC = ۷۲/۶m$ و $\cot B = \frac{۳}{۱۴}$ است. اندازه‌ی ضلع AB را به‌دست آورید.

۵. نیم‌دایره‌ای به قطر AB داده شده است. مماس در نقطه‌ی B را بر این نیم‌دایره رسم می‌کنیم و از نقطه‌ی A قاطعی می‌کشیم تا نیم‌دایره را در C و مماس مزبور را در D قطع کند. اگر α زاویه‌ی بین قاطع و قطر AB بوده و $AD = ۴AC$ باشد اندازه‌ی α چقدر است؟

۶. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin ۶۰^\circ \cos ۳۰^\circ + \sin ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ - ۲\sin ۶۰^\circ \cos ۳۰^\circ$

ب) $\dfrac{\tan ۶۰^\circ - \tan ۳۰^\circ}{۱ + \tan ۶۰^\circ \tan ۳۰^\circ}$

ج) $\sin ۴۵^\circ \cos ۴۵^\circ - \tan ۴۵^\circ$

د) $\dfrac{\tan ۳۰^\circ + \tan ۴۵^\circ}{۱ - \tan ۳۰^\circ \tan ۴۵^\circ}$

۷. درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $۲\sin ۳۰^\circ \cos ۳۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$

ب) $\cos^۲ ۳۰^\circ - \sin^۲ ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ$

ج) $۱ - ۲\sin^۲ ۴۵^\circ = \cos ۹۰^\circ$

د) $\frac{۲\tan ۳۰^\circ}{۱+\tan^۲ ۳۰^\circ} = \sin ۶۰^\circ$

۸. از نقطه‌ی O که به ارتفاع ۱/۳۶ متر از سطح زمین قرار دارد زاویه‌ی فراز برجی برابر با ۲۱° است. درصورتی‌که فاصله‌ی نقطه از پای برج ۴۲ متر باشد ارتفاع برج را تعیین کنید. $(\tan ۲۱^\circ = ۰/۳۸۳۹)$

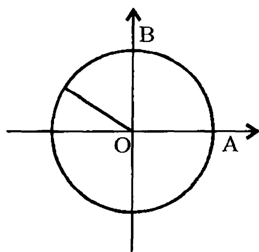
۹. ارتفاع مناره‌ای ۱۲ متر است. زاویه‌ی فراز سر مناره در نقطه‌ی A برابر ۳۰° است. فاصله‌ی نقطه‌ی A از پای مناره چند متر است؟

۱۰. در دو نقطه‌ی A و B که در دو طرف یک درخت واقع و با پای درخت در روی یک خط راست می‌باشند زاویه‌های فراز سر درخت را اندازه گرفته‌اند به ترتیب $(۳۶\frac{۱}{۳})^\circ$ و ۴۳° به دست آمده است. فاصله $AB = ۱۱/۶$ است. ارتفاع درخت چقدر است؟

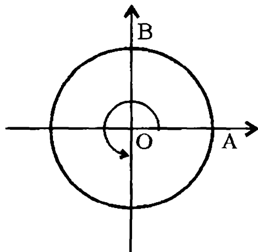
$$\tan ۴۳^\circ = ۰/۹۳۲۵ \quad , \quad \tan(۳۶\frac{۱}{۳})^\circ = ۰/۷۳۵۵$$

۱۱. اگر $\cos\alpha = \frac{۲}{۵}$ و α زاویه‌ای حاده باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را تعیین کنید.

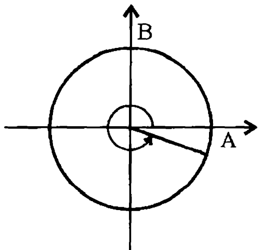
۱۲. در شکل زیر شعاع دایره یک سانتی‌متر است. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۵۰° را حساب کنید.



۱۳. در شکل زیر شعاع دایره یک سانتی‌متر است. نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۷۰° را حساب کنید.



۱۴. در شکل زیر شعاع دایره یک سانتی‌متر است. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۳۳۰° را حساب کنید.



۱۵. اگر $\tan\alpha = ۲$ و $۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را تعیین کنید.

۱۶. ماکزیمم و مینیمم عبارت $A = ۳ - ۲\sin\alpha$ را تعیین کنید.

۱۷. اگر $\sin x = -\frac{۸}{۱۷}$ و $۱۸۰^\circ < x < ۲۷۰^\circ$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی x را تعیین کنید.

۱۸. اگر $\tan x = -۲$ و $۹۰^\circ < x < ۱۸۰^\circ$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی x را تعیین کنید.

۱۹. حدود زاویه‌ی x را چنان تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد؟

$$\tan x + \cot x = \sqrt{\frac{۱}{\sin^۲ x} + \frac{۱}{\cos^۲ x}}$$

۲۰. درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $۱ - \cot^۴ x = \frac{۱}{\sin^۲ x} - \frac{\cos^۲ x}{\sin^۴ x}$

ب) $(\sin x + \tan x)(\cos x + \cot x) = (۱ + \sin x)(۱ + \cos x)$

ج) $۲(\sin^۶ x + \cos^۶ x) - ۳(\sin^۴ x + \cos^۴ x) = -۱$

د) $\frac{1}{\sin^4\theta}=2\cot^2\theta+\cot^4\theta+1$

هـ) $\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\tan^4 x}=1+\frac{2\cot^2 x}{\sin^2 x}$

و) $\frac{1}{3}(\sin^6 x+\cos^6 x)-\frac{1}{4}(\cos^2 x-\sin^2 x)^2=\frac{1}{12}$

ز) $\sin^2 y-\sin^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}-\frac{1}{1+\tan^2 y}$

ح) $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin x}$

ط) $\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\cos^2 x}=(1+\tan x)(\tan x-1)$

۲۱. درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(1+\tan x+\cot x)\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

ب) $\sin^2 x.\cos^2 x.\tan^2 x+\frac{\cos^2 x.\cot^2 x}{1+\cot^2 x}=1-2\sin^2 x.\cos^2 x$

ج) $\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)\left(\frac{1}{\cos x}-\cos x\right)=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$

د) $1+\frac{\cos^2 y-\sin^2 x}{\sin^2 x\sin^2 y}=\cot^2 x.\cot^2 y$

هـ) $\frac{1+\sin a}{1-\sin a}-\frac{1-\sin a}{1+\sin a}=\frac{4\tan a}{\cos a}$

و) $\frac{\sin^6 x-\cos^6 x}{2\sin^2 x-1}=1-\sin^2 x+\sin^4 x$

ز) $\sin^8 x+\cos^8 x+4\sin^2 x.\cos^2 x=1+2\sin^4 x\cos^4 x$

ح) $\frac{\sin^4 x.\tan^2 x}{1+\tan^2 x}+\frac{\cos^4 x.\cot^2 x}{1+\cot^2 x}=1-3\sin^2 x.\cos^2 x$

ط) $\dfrac{(۱+\cos b)(\tan b-\sin b)}{\sin^۳ b}=\dfrac{۱}{\cos b}$

ی) $\dfrac{۱-\tan^۲ x}{\sin x}-\dfrac{۱-\cot^۲ x}{\cos x}=\dfrac{(۲\cos^۲ x-۱)(\sin x+\cos x)}{\sin^۲ x.\cos^۲ x}$

ک) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\dfrac{۲\cos^۲ x-۱}{\cos^۲ x(۱-\tan^۲ x)}=\dfrac{۲\tan x}{\tan x-۱}$

ل) $\dfrac{\sin^۲ x-\tan^۲ x}{\cos^۲ x-\cot^۲ x}=\tan^۶ x$

م) $\cot^۲ x.\dfrac{\sec x-۱}{\sin x+۱}+\sec^۲ x.\dfrac{\sin x-۱}{\sec x+۱}=۰$

ن) $\sin^۶ x+\cos^۶ x=۳\sin^۴ x-۳\sin^۲ x+۱$

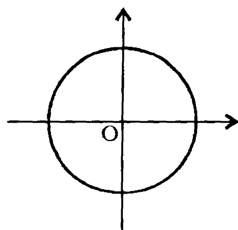
۲۲. اگر $\frac{\pi}{۲}>\alpha>۰$ باشد با زیاد شدن α در این ناحیه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α چه تغییری می‌کند؟

۲۳. اگر $\frac{\pi}{۲}>\alpha>۰$ باشد آیا می‌توان گفت همواره $\sin\alpha<\cos\alpha$؟

۲۴. اگر $\sin\alpha\cos\alpha<۰$ باشد حدود α را تعیین کنید.

۲۵. اگر $\tan\alpha+\cot\alpha>۰$ باشد حدود α را تعیین کنید.

۲۶. در شکل مقابل شعاع دایره یک سانتی‌متر است. ناحیه‌ای را در شکل مشخص کنید که اگر α در آن ناحیه قرار گیرد $\sin\alpha>\frac{۱}{۳}$ شود.



۲۷. بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{۳}+\sqrt{۵}\sin x$

ب) $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\cos x$

۲۸. اگر $\tan x=\frac{۳}{۴}$ بوده و انتهای کمان مقابل به x در فاصله‌ی $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ باشد حاصل $\frac{۵\sin x+۴\cos x}{۲\cos x}$ چیست؟

۲۹. اگر داشته باشیم $\sin\theta=\frac{m}{\sqrt{۲m^{۲}+۷m}}$ و $\tan\theta=\frac{۳}{۴}$، مقدار m را تعیین کنید.

۳۰. اگر داشته باشیم $\cot x=\sqrt{۴-m}$ و $\sin x=\sqrt{\frac{۳}{m}}$، مقدار m چیست؟

۳۱. اگر داشته باشیم $\cot\alpha=۲-۳m$ و $\sin\alpha=\sqrt{\frac{۱}{۳m-۱}}$ باشند، مقادیر m را به‌دست آورید.

۳۲. اگر داشته باشیم $A=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$، $(A\neq -۱)$ حاصل $\tan x$ برحسب A چیست؟

۳۳. نشان دهید به ازاء هر عدد حقیقی m، گزاره‌های زیر برقرارند.

$$\cos\alpha=\frac{۱-m^{۲}}{۱+m^{۲}} \qquad \sin\alpha=\frac{۲m}{۱+m^{۲}}$$

۳۴. اگر داشته باشیم $\sin x=a-b$ و $\cos x=\sqrt{۱+۲ab}$، مقادیر a و b را تعیین کنید.

۳۵. a و b را چنان تعیین کنید که رابطه‌ی زیر یک اتحاد باشد.

$$(a+b\sin x-b\cos x)^{۲}=۲(۱-\sin x)(۱+\cos x)$$

۳۶. اگر $\tan x=\frac{m+۱}{m}$ و $\cos x=\frac{m}{m+۲}$ باشد مقدار m را به‌دست آورده و نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی x را حساب کنید.

۳۷. اگر $\tan\alpha = \frac{a-1}{a}$ و $\cot\alpha = \frac{3}{b-2}$ باشد بین a و b چه رابطه‌ای برقرار است؟

۳۸. اگر $\sin x = \frac{a-1}{a+1}$ و $\cos y = \frac{2\sqrt{a}}{a+1}$ و $a > 0$ باشد حاصل $\sin^2 x + \cos^2 y$ را حساب کنید.

۳۹. از رابطه‌ی $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{a + \cot x}}$ مقدار $\tan x$ را برحسب a به‌دست آورید.

$(a \neq -\cot x \ , \ x \neq \frac{k\pi}{2})$

۴۰. بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار عبارت $A = \cos^2 x + 3\sin x + 2$ را به‌دست آورید.

۴۱. حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}$

ب) $\sin^8 x + \cos^8 x + 2\sin^2 x \cos^2 x (2 - \sin^2 x \cos^2 x)$

۴۲. اگر $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ باشد علامت عبارت زیر را مشخص کنید.

$A = (\sin\alpha - \sin\beta)(\cos\alpha - \cos\beta)$

۴۳. اگر A و B و C زاویه‌های مثلث ABC و

$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) = 1$

باشد ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۴۴. از تساوی $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + \sec^2\alpha + \csc^2\alpha = 7$ حاصل عبارت $\sin\alpha.\cos\alpha$ را حساب کنید.

۴۵. از تساوی $\sin(x-y) + \cos(x+y) = 2$ مقدار x و y را حساب کنید.

۴۶. اگر $\sin\alpha + \cos\alpha = k$ باشد حاصل $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ را برحسب k حساب کنید.

۴۷. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تساوی زیر به ازای همه‌ی مقادیر α برقرار باشد.

$$۴\tan^{۲}\alpha=\sin\alpha\left(\frac{a}{۱-\sin\alpha}+\frac{b}{۱+\sin\alpha}\right)\qquad \alpha\neq\frac{k\pi}{۲}$$

۴۸. اگر داشته باشیم $a\sin^{۲}x-b\cos^{۲}x=a-b$، ثابت کنید:

$$b\sin^{۴}x+a\cos^{۴}x=\frac{ab}{a+b}$$

۴۹. اگر داشته باشیم $\frac{\sin^{۴}x}{a}+\frac{\cos^{۴}x}{b}=\frac{۱}{a+b}$، حاصل $\frac{\sin^{۸}x}{a^{۳}}+\frac{\cos^{۸}x}{b^{۳}}$ را برحسب a و b به‌دست آورید.

۵۰. اگر $a=۳\cos x+۴\sin x$ و $b=۳\sin x-۴\cos x$ و $c=۵\tan x$ باشند، ثابت کنید:

$$\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}=۵|\sec x|$$

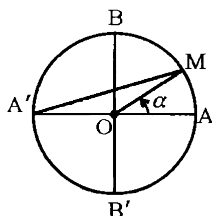
۵۱. اگر:

$$P=(۱+\cos\alpha)(۱+cox\,\beta)(۱+\cos\gamma)=(۱-\cos\alpha)(۱-\cos\beta)(۱-\cos\gamma)$$

باشد، ثابت کنید: $P=|\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma|$.

۵۲. با شرط $\csc x-\sin x=m^{۳}$ و $\sec x-\cos x=n^{۳}$، ثابت کنید:

$$m^{۲}n^{۲}(m^{۲}+n^{۲})=۱$$



۵۳. در دایره‌ی مثلثاتی زیر ثابت کنید: $\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$ و توسط آن نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۱۵° و $۲۲/۵^\circ$ را به‌دست آورید.

۵۴. از تساوی $\sin\theta+\csc\theta=۲$ مقدار $\cos\theta$ را به‌دست آورید.

۵۵. عبارت $۲\sin^{۲}x-۳\sin x+\frac{۱}{\tan x+\cot x}$ را برحسب $\cos x$ بنویسید.

۵۶. از تساوی $\sin x + \cos x = \sqrt{۲}$ مقدار $\tan x$ را به‌دست آورید.

۵۷. درصورتی‌که $\tan x - \cot x = \frac{۷}{۱۲}$ بوده و انتهای کمان مقابل به x در ناحیه اول باشد، نسبت‌های مثلثاتی x را به‌دست آورید.

۵۸. اگر داشته باشیم $\cot\theta = -\sqrt{۳}$ و $\frac{۳\pi}{۲} < \theta < ۲\pi$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی θ را حساب کنید.

۵۹. اگر α زاویه‌ای حاده باشد ثابت کنید $\tan\alpha + \cot\alpha \geq ۲$.

۶۰. مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس $\widehat{A} = ۳۶^\circ$ و ساق $AB = AC = ۱$ را درنظر بگیرید. با رسم ارتفاع وارد بر BC و نیمساز $\widehat{C}$ و استفاده از تشابه $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{CBD}$، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۸° را به‌دست آورید.

۶۱. به ازاء هر α ثابت کنید:

$$\frac{۳+\cos^۲\alpha}{۲-\sin\alpha} - \frac{۳+\sin^۲\alpha}{۲+\cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$$

۶۲. ثابت کنید مقدار کسر زیر به k بستگی ندارد.

$$\frac{۱-\cos x + k\sin x}{\sin x + k(۱+\cos x)}$$

۶۳. اگر $\pi > \beta > \alpha > \frac{\pi}{۲}$ باشد علامت عبارت زیر را تعیین کنید.

$$A = (\sin\alpha - \sin\beta)(\tan\alpha - \tan\beta)$$

۶۴. از تساوی $\sin ۱۵^\circ \times \cos ۱۵^\circ = \frac{۱}{۴}$، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۵° را به‌دست آورید.

۶۵. در دستگاه زیر رابطه‌ای مستقل از x بین m و n تعیین کنید.

$$\begin{cases} \tan x + \cot x = m^{۳} \\ \dfrac{۱}{\sin x} - \sin x = n^{۳} \end{cases}$$

۶۶. ثابت کنید $\sin\theta\cos\theta \leq \frac{۱}{۲}$.

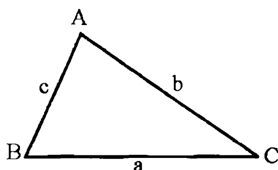
۶۷. ثابت کنید $a^{۲}\tan^{۲}\theta + b^{۲}\cot^{۲}\theta \geq ۲ab$.

۶۸. در مثلث ABC مساحت مثلث ۱۶ و $\tan B = \tan C = ۴$ می‌باشد. محـیط مثلـث را حساب کنید.

۶۹. اگر A و B و C زاویه‌های یک مثلث باشند نشان دهید:

$$\cos\frac{B+C}{۲} = \sin\frac{A}{۲}$$

۷۰. در شکل زیر نشان دهید: $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$



فصل دوازدهم

معادله‌ی درجه‌ی دوّم

معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی می‌باشند و $a\neq 0$ یک معادله‌ی درجه‌ی دوم برحسب x می‌نامند. در این معادله اگر b یا c صفر باشند معادله به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم ناقص تبدیل می‌شود.

✩ حل معادله‌ی درجه‌ی دوم ناقص

اگر معادله به صورت $ax^2+bx=0$ باشد، در آن از x فاکتور گرفته و به صورت حاصل‌ضرب دو عبارت شامل x درآورده و هرکدام را مساوی صفر قرار می‌دهیم که یکی از جواب‌ها صفر و دیگری $-\frac{b}{a}$ می‌شود.

$$ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0$$

$$x=0$$

$$ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

اگر معادله به صورت $ax^2+c=0$ باشد و a و c مختلف‌العلامه باشند جواب معادله $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ خواهد شد.

مثال ۱ :معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2+3x=0$ ب) $5x^2-20x=0$

ج) $3x^2-48=0$ د) $4x^2+36=0$

حل:

الف) $x^{۲}+۳x=۰ \Rightarrow x(x+۳)=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳$

ب) $۵x^{۲}-۲۰x=۰ \Rightarrow ۵x(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۵x=۰ \Rightarrow x=۰ \\ x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \end{cases}$ یا

ج) $۳x^{۲}-۴۸=۰ \Rightarrow ۳x^{۲}=۴۸=۴۸ \Rightarrow x^{۲}=۱۶ \Rightarrow x=\pm ۴$

د) $۴x^{۲}+۳۶=۰ \Rightarrow ۴x^{۲}=-۳۶ \Rightarrow x^{۲}=-۹$

این معادله جواب حقیقی ندارد.

روش‌های مختلف حل معادله‌ی درجه‌ی دوم کامل

$$ax^{۲}+bx+c=۰ \quad (a,b,c\neq ۰)$$

۱ـ به کمک تجزیه: دراین روش سه‌جمله‌ای درجه‌ی دوم را به حاصل‌ضرب دو پرانتز تجزیه کرده و هر کدام را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال ۲ : معادله‌ی $x^{۲}-x-۶=۰$ را حل کنید.

حل:

$$x^{۲}-x-۶=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۳)=۰$$

$$x+۲=۰ \Rightarrow \boxed{x=-۲}$$

$$x-۳=۰ \Rightarrow \boxed{x=۳}$$

مثال ۳ : معادله‌ی $۴x^{۲}-۱۶x+۱۵=۰$ را حل کنید.

حل:

$$۴x^{۲}-۱۶x+۱۵=۰ \Rightarrow (۲x-۳)(۲x-۵)=۰$$

$$۲x-۳=۰ \Rightarrow \boxed{x=\frac{۳}{۲}}$$

$$۲x-۵=۰ \Rightarrow \boxed{x=\frac{۵}{۲}}$$

مثال ۴ : معادله‌ی $۳x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$۳x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۹x^۲ - ۲ \times ۳x - ۳ = ۰ \Rightarrow (۳x - ۳)(۳x + ۱) = ۰$$

$$۳x - ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۱}$$

$$۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = -\frac{۱}{۳}}$$

۲ـ به کمک مربع کامل سازی: در این روش ابتدا جمله‌هایی را که شامل مجهول x هستند در یک طرف تساوی و عدد ثابت را در طرف دیگر قرار می‌دهیم. اگر ضریب $x^۲$ عددی غیر از یک است دو طرف را بر این ضریب تقسیم می‌کنیم. سپس مربع نصف ضریب x را به دو طرف معادله می‌افزاییم تا یک طرف مربع کامل شود. در این حالت درصورتی‌که دو طرف مثبت باشند از طرفین جذر می‌گیریم.

مثال ۵ : معادله‌ی $x^۲ + ۶x - ۱۸۷ = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$x^۲ + ۶x - ۱۸۷ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ = ۱۸۷ + ۹$$

$$(x + ۳)^۲ = ۱۹۶ \Rightarrow x + ۳ = ۱۴ \Rightarrow \boxed{x = ۱۱}$$

$$x + ۳ = -۱۴ \Rightarrow \boxed{x = -۱۷}$$

مثال ۶ : معادله‌ی $۳x^۲ + ۴x = ۱۵$ را حل کنید.

حل:

$$۳x^۲ + ۴x = ۱۵ \Rightarrow x^۲ + \frac{۴}{۳}x = ۵$$

$$x^۲ + \frac{۴}{۳}x + \frac{۴}{۹} = ۵ + \frac{۴}{۹} \Rightarrow \left(x + \frac{۲}{۳}\right)^۲ = \frac{۴۹}{۹}$$

$$x + \frac{۲}{۳} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow \boxed{x = \frac{۵}{۳}}$$

$$x + \frac{۲}{۳} = -\frac{۷}{۳} \Rightarrow \boxed{x = -۳}$$

مثال ۷ : معادله‌ی $x^{۲}-\frac{x}{۶}=\frac{۷}{۶}$ را حل کنید.

حل:

$$x^{۲}-\frac{x}{۶}=\frac{۷}{۶} \Rightarrow x^{۲}-\frac{x}{۶}+\frac{۱}{۱۴۴}=\frac{۷}{۶}+\frac{۱}{۱۴۴}$$

$$\left(x-\frac{۱}{۱۲}\right)^{۲}=\frac{۱۶۹}{۱۴۴} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱۳}{۱۲} \Rightarrow x=\frac{۷}{۶} \\ x-\frac{۱}{۱۲}=-\frac{۱۳}{۱۲} \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

۳ـ دستور کلی حل معادله‌ی درجه‌ی دوّم: برای به‌دست آوردن دستور کلی حل معادله‌ی درجه‌ی دوم از روش مربع کامل‌سازی کمک می‌گیریم.

$$ax^{۲}+bx+c=۰ \qquad (a\neq ۰)$$

$$ax^{۲}+bx=-c \Rightarrow x^{۲}+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}=\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}-\frac{c}{a} \Rightarrow \left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}=\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}$$

در صورتی‌که $b^{۲}-۴ac$ نامنفی باشد خواهیم داشت:

$$x+\frac{b}{۲a}=\frac{\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a} \Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}\pm\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}}$$

مبین معادله‌ی درجه‌ی دوم: عبارت $b^{۲}-۴ac$ را که وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ به علامت آن بستگی دارد مبین معادله می‌نامند و آن‌را با حرف Δ نمایش می‌دهند.

اگر $\Delta=b^{۲}-۴ac>۰$ ، معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است.

$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a} \text{ و } x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ، معادله دارای یک ریشه است که آن را ریشه‌ی مضاعف می‌نامند.

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم ابتدا مبین معادله را به‌دست می‌آوریم. اگر Δ مثبت باشد از دستور کلی معادله را حل می‌کنیم و اگر Δ صفر بود ریشه‌ی مضاعف معادله را از دستور $x = -\frac{b}{2a}$ حساب می‌کنیم و اگر Δ منفی بود معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال ۸ : معادله‌ی $2x^2 + 13x - 45 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$a = 2 \, , b = 13 \, , c = -45$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \times 2 \times (-45) = 169 + 360 = 529 > 0$$

چون Δ مثبت است معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

$$x_1 = \frac{-13 + \sqrt{529}}{4} = \frac{-13 + 23}{4} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-13 - \sqrt{529}}{4} = \frac{-13 - 23}{4} = -9$$

مثال ۹ : معادله‌ی $3x^2 - 5x + 2 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{6} = \frac{5 + 1}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{6} = \frac{5 - 1}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال ۱۰ : معادله‌ی $25x^2 - 30x + 9 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$\Delta = (-۳۰)^۲ - ۴\times ۲۵\times ۹ = ۹۰۰ - ۹۰۰ = ۰$$

$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۳۰}{۵۰} = \frac{۳}{۵}$$

مثال ۱۱ : معادله‌ی $۳x^۲ + ۵x + ۷ = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$\Delta = ۵^۲ - ۴\times ۳\times ۷ = ۲۵ - ۸۴ = -۵۹ < ۰$$

چون مبین معادله منفی است، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

نکته: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر a و c مختلف‌العلامه باشند مبین معادله مثبت می‌شود و معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

شرط مختلف‌العلامه بودن a و c برای وجود دو ریشه کافی است ولی لازم نیست.

☆ ساده کردن دستورها (دستور b'):

اگر در معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ ضریب x یعنی b عددی زوج باشد دستورهای حل معادله را می‌توان ساده کرد. بدین ترتیب که با اختیار $b = ۲b'$ خواهیم داشت:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} = \frac{-۲b' \pm \sqrt{۴b'^۲ - ۴ac}}{۲a} = \frac{۲(-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac})}{۲a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a}}$$

مثال ۱۲ : معادله‌ی $۳x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$x = \frac{۲ \pm \sqrt{۲^۲ - ۳\times ۱}}{۳} = \frac{۲ \pm ۱}{۳}$$

$$x_۱ = \frac{۲+۱}{۳} = ۱$$

$$x_۲ = \frac{۲-۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

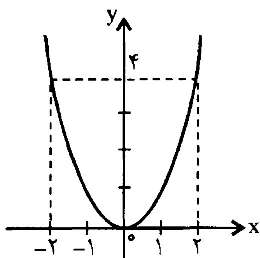
مثال ۱۳ : **معادله‌ی $۵x^{۲} + ۶x - ۸ = ۰$ را حل کنید.**

حل:

$$x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۳^{۲} - ۵ \times (-۸)}}{۵} = \frac{-۳ \pm \sqrt{۴۹}}{۵} = \frac{-۳ \pm ۷}{۵}$$

$$x_{۱} = \frac{-۳ + ۷}{۵} = \frac{۴}{۵} \qquad x_{۲} = \frac{-۳ - ۷}{۵} = -۲$$

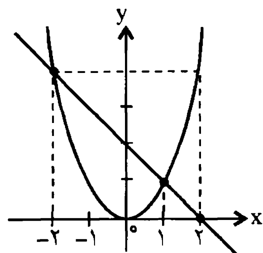
۴ـ روش هندسی: نمودار رابطه‌ی $y = x^{۲}$ که آن‌را سهمی می‌نامیم به صورت زیر است. خط تقارن این سهمی محور عرض و رأس سهمی مبدأ مختصات می‌باشد.



معادله‌ی $x^{۲} + x - ۲ = ۰$ را درنظر بگیرید. می‌توان گفت جواب‌های این معادله طول نقاط برخورد سهمی $y = x^{۲}$ و خط $y = -x + ۲$ می‌باشد.

$$x^{۲} + x - ۲ = ۰ \Rightarrow x^{۲} = -x + ۲$$

همان‌طور که روی نمودار ملاحظه می‌کنیم خط $y = -x + ۲$ سهمی $y = x^{۲}$ در نقاط $(۱,۱)$ و $(-۲,۴)$ قطع می‌کند که طول این نقاط یعنی ۱ و ۲- جواب‌های معادله‌ی $x^{۲} + x - ۲ = ۰$ می‌باشند.

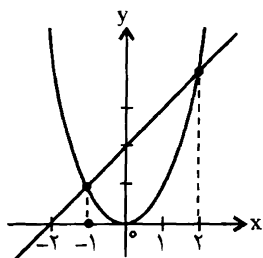


مثال ۱۴ : **معادله‌ی $x^{۲} - x - ۲ = ۰$ را حل کنید.**

حل:

$$x^{۲} - x - ۲ = ۰ \Rightarrow x^{۲} = x + ۲$$

جواب‌های معادله طول نقاط برخورد سهمی $y = x^{۲}$ و خط $y = x + ۲$ می‌باشد.



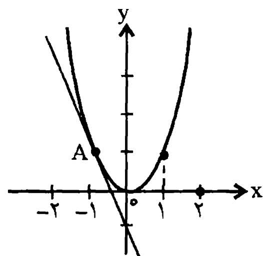
خط $y = x + ۲$ سهمی $y = x^۲$ را در دو نقطه‌ی $(-۱,۱)$ و $(۲,۴)$ قطع می‌کند که طول این نقاط یعنی ۱- و ۲ جواب‌های معادله می‌باشند. در این مثال مبین معادله‌ی $x^۲ - x - ۲ = ۰$ مثبت می‌باشد که خط و سهمی در دو نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند.

مثال ۱۵ : معادله‌ی $x^۲ + ۲x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = -۲x - ۱$$

جواب‌های معادله نقاط برخورد سهمی $y = x^۲$ و خط $y = -۲x - ۱$ می‌باشند.

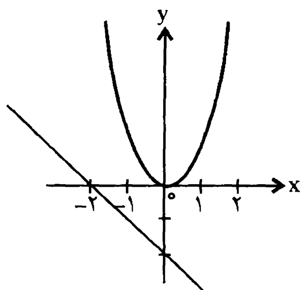


خط $y = -۲x - ۱$ در نقطه‌ی $A\ (-۱,۱)$ بر سهمی $y = x^۲$ مماس است. طول نقطه‌ی A یعنی عدد ۱- جواب معادله‌ی $x^۲ + ۲x + ۱ = ۰$ است. در این مثال مبین معادله‌ی $x^۲ + ۲x + ۱ = ۰$ برابر صفر است که خط در یک نقطه بر سهمی مماس می‌شود.

مثال ۱۶ : معادله‌ی $x^۲ + x + ۲ = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$x^۲ + x + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = -x - ۲$$



جواب‌های معادله طول نقاط برخورد سهمی $y = x^۲$ و خط $y = -x - ۲$ می‌باشد.

خط $y = -x - ۲$ سهمی $y = x^۲$ را قطع نمی‌کند. بنابراین معادله‌ی $x^۲ + x + ۲ = ۰$ جواب ندارد. در این مثال مبین معادله‌ی $x^۲ + x + ۲ = ۰$ منفی می‌باشد که خط و سهمی هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.

مثال ۱۷ : مقدار m را چنان تعیین کنید که سهمی $y=x^2$ و خط $y=mx+1$ دو نقطه‌ی مشترک داشته باشند.

حل:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=mx+1 \end{cases} \Rightarrow x^2=mx+1 \Rightarrow x^2-mx-1=0$$

برای این‌که سهمی $y=x^2$ و خط $y=mx+1$ دو نقطه‌ی مشترک داشته باشند باید مبین معادله‌ی x^2-mx-1 مثبت باشد.

$$\Delta=(-m)^2-4\times1\times(-1)>0 \Rightarrow m^2+4>0$$

این نامساوی همواره برقرار است. یعنی به ازای هر مقدار m خط و سهمی دو نقطه‌ی مشترک دارند.

مثال ۱۸ : مقدار m را چنان تعیین کنید که خط $y=mx-9$ بر سهمی $y=x^2$ مماس باشد.

حل:

$$\begin{cases} y=mx-9 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2=mx-9 \Rightarrow x^2-mx+9=0$$

برای این‌که خط بر سهمی مماس باشد باید مبین معادله‌ی x^2-mx+9 برابر صفر باشد.

$$\Delta=(-m)^2-4\times1\times9=0 \Rightarrow m^2-36=0 \Rightarrow m^2=36 \Rightarrow m=\pm6$$

مثال ۱۹ : مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دارای ریشه‌ی مضاعف باشد. سپس ریشه‌ی مضاعف را حساب کنید. $(m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3)=0$

حل:

$$\Delta'=b'^2-ac=(3m+1)^2-(m+3)^2=9m^2+6m+1-m^2-6m-9=0$$

$$8m^2-8=0 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm1$$

$$m=1 \Rightarrow x=\frac{-2(3m+1)}{2(m+3)}=\frac{-(3\times1+1)}{1+3}=-\frac{4}{4}=-1$$

$$m=-1 \Rightarrow x=\frac{-2(3m+1)}{2(m+3)}=\frac{-(3\times(-1)+1)}{-1+3}=\frac{2}{2}=1$$

مثال ۲۰ : مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی زیر ۲ باشد. سپس ریشه‌ی دیگر را حساب کنید.

$$(m+1)x^2-2mx+m-5=0$$

حل:

$$(m+1)\times 2^2-2m\times 2+m-5=0 \Rightarrow 4m+4-4m+m-5=0$$
$$m-1=0 \Rightarrow m=1$$
$$m=1 \Rightarrow (1+1)x^2-2\times 1x+1-5=0 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0$$
$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$$
$$x_1=\frac{1+3}{2}=2 \qquad x_2=\frac{1-3}{2}=-1$$

مثال ۲۱ : به ازای چه مقادیری از m معادله‌ی زیر دارای دو ریشه‌ی حقیقی است؟

$$(4m+1)x^2-4mx+m-3=0$$

حل:

$$\Delta'>0 \Rightarrow (-2m)^2-(4m+1)(m-3)>0$$
$$4m^2-4m^2+12m-m+3>0$$
$$11m>-3 \Rightarrow m>-\frac{3}{11}$$

مثال ۲۲ : حدود m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر جواب نداشته باشد.

$$mx^2-2mx+(m+1)=0$$

حل:

$$\Delta'<0 \Rightarrow m^2-m(m+1)<0 \Rightarrow m^2-m^2-m<0$$
$$-m<0 \Rightarrow m>0$$

مثال ۲۳ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{8}{x^2-1}$$

حل:

$$\frac{x^{۲}+x-۲x+۲}{x^{۲}-۱}=\frac{۸}{x^{۲}-۱} \Rightarrow x^{۲}-x+۲=۸$$

$$x^{۲}-x-۶=۰ \Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۲۴}}{۲}=\frac{۱\pm۵}{۲}$$

$$x_{۱}=\frac{۱+۵}{۲}=۳ \qquad x_{۲}=\frac{۱-۵}{۲}=-۲$$

مثال ۲۴ : معادله‌ی $\frac{x-۱}{x-۳}+\frac{x-۳}{x-۱}+۲=۰$ را حل کنید.

حل:

$$\frac{x-۱}{x-۳}=y \Rightarrow \frac{x-۳}{x-۱}=\frac{۱}{y}$$

$$y+\frac{۱}{y}+۲=۰ \Rightarrow y^{۲}+۱+۲y=۰ \Rightarrow (y+۱)^{۲}=۰$$

$$y+۱=۰ \Rightarrow y=-۱$$

$$\frac{x-۱}{x-۳}=-۱ \Rightarrow x-۱=-x+۳ \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲$$

مثال ۲۵ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x}+\frac{۳x}{x^{۲}-۲x+۲}=۴$$

حل:

$$\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x}=y \Rightarrow y+\frac{۳}{y}=۴ \Rightarrow y^{۲}-۴y+۳=۰$$

$$y=\frac{۲\pm\sqrt{۴-۳}}{۱}=۲\pm۱ \Rightarrow y_{۱}=۳ \ , \ y_{۲}=۱$$

$$\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x}=۳ \Rightarrow x^{۲}-۵x+۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۵\pm\sqrt{۱۷}}{۲}$$

$$\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x}=۱ \Rightarrow x^{۲}-۳x+۲=۰ \Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=۲$$

مثال ۲۶ : معادله‌ی $x^{2}+x+1=\frac{42}{x^{2}+x}$ را حل کنید.

حل:

$$x^{2}+x=y \Rightarrow y+1=\frac{42}{y} \Rightarrow y^{2}+y-42=0$$

$(y+7)(y-6)=0 \Rightarrow y=-7$ یا $y=6$

$x^{2}+x=-7 \Rightarrow x^{2}+x+7=0$ جواب ندارد

$x^{2}+x=6 \Rightarrow x^{2}+x-6=0 \Rightarrow x=2$ یا $x=-3$

مثال ۲۷ : مقدار a را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو جواب برابر داشته باشد.

$$x^{2}-(3a+1)x+2a^{2}+2=0$$

حل:

$$\Delta=0 \Rightarrow (3a+1)^{2}-4(2a^{2}+2)=0$$

$$9a^{2}+6a+1-8a^{2}-8=0 \Rightarrow a^{2}+6a-7=0$$

$(a-1)(a+7)=0 \Rightarrow a=1$ یا $a=-7$

مثال ۲۸ : در معادله‌ی $ax^{2}+bx+c=0$ اگر $a+b+c=0$، ثابت کنید یکی از ریشه‌های معادله یک و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است.

حل:

$$a+b+c=0 \Rightarrow c=-a-b$$

$$ax^{2}+bx+c=ax^{2}+bx-a-b=a(x^{2}-1)+b(x-1)=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(ax+a+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ ax+a+b=0 \Rightarrow ax=-a-b \end{cases}$$

$$\Rightarrow ax=c \Rightarrow x=\frac{c}{a}$$

مثال ۲۹ : در معادله‌ی $ax^{2}+bx+c=0$ اگر $a+c=b$ ثابت کنید یکی از ریشه‌های معادله -1 و ریشه‌ی دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

حل:

$$a+c=b$$
$$\Rightarrow ax^{۲}+bx+c=ax^{۲}+bx+b-a=a(x^{۲}-۱)+b(x+۱)=۰$$
$$\Rightarrow (x+۱)(ax-a+b)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ ax-a+b=۰ \Rightarrow ax=a-b \end{cases}$$
$$\Rightarrow ax=-c \Rightarrow x=-\frac{c}{a}$$

مثال ۳۰ : جواب‌های معادله‌ی $x^{۲}-۱۹x+۱۸=۰$ را به‌دست آورید.

حل:

$$۱+(-۱۹)+۱۸=۰$$
$$x_{۱}=۱ \quad , \quad x_{۲}=\frac{۱۸}{۱}=۱۸$$

مثال ۳۱ : جواب‌های معادله‌ی $x^{۲}-۱۳۵x-۱۳۶=۰$ را به‌دست آورید.

حل:

$$۱+(-۱۳۶)=-۱۳۵$$
$$x_{۱}=-۱ \quad , \quad x_{۲}=-\frac{-۱۳۶}{۱}=۱۳۶$$

☆ تجزیه‌ی سه‌جمله‌ی درجه‌ی دوم

قضیه: اولاً: اگر معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ دارای دو ریشه‌ی متمایز x' و x'' باشد، آن‌گاه:

$$ax^{۲}+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$

ثانیاً: اگر معادله‌ی فوق دارای ریشه‌ی مضاعف x' باشد آن‌گاه:

$$ax^{۲}+bx+c=a(x-x')^{۲}$$

برهان: اولاً: فرض می‌کنیم $\Delta=b^{۲}-۴ac>۰$ که در این صورت معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ دارای دو ریشه‌ی x' و x'' می‌باشد که:

$$x'+x''=-\frac{b}{a} \quad , \quad x'x''=\frac{c}{a}$$

بنابراین:

$$ax^{۲}+b+c=a\left(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^{۲}-(x'+x'')x+x'x''\right]$$
$$=a\left[x^{۲}-xx'-xx''+x'x''\right]=a\left[x(x-x')-x''(x-x')\right]$$
$$=a(x-x')(x-x'')$$

ثانیاً: فرض می‌کنیم $\Delta=b^{۲}-۴ac=۰$. درنتیجه $c=\frac{b^{۲}}{۴a}$ و از آن‌جا:

$$ax^{۲}+bx+c=a\left(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}\right)=a\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}$$
$$=a\left(x-\left(-\frac{b}{۲a}\right)\right)^{۲}=a(x-x')^{۲}$$

مثال ۳۲ : عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $۴x^{۲}-۱۶x+۱۵$ **ب) $۹x^{۲}-۶x+۱$**

حل:

الف) $۴x^{۲}-۱۶x+۱۵=۰$

$$\Delta'=(-۸)^{۲}-۴\times۱۵=۴>۰$$
$$x'=\frac{۸\pm\sqrt{۴}}{۴}=\frac{۸+۲}{۴}=\frac{۵}{۲}$$
$$x''=\frac{۸-\sqrt{۴}}{۴}=\frac{۸-۲}{۴}=\frac{۳}{۲}$$
$$۴x^{۲}-۱۶x+۱۵=۴\left(x-\frac{۵}{۲}\right)\left(x-\frac{۳}{۲}\right)=(۲x-۵)(۲x-۳)$$

ب) $۹x^{۲}-۶x+۱=۰$

$$\Delta'=(-۳)^{۲}-۹\times۱=۰\Rightarrow x'=\frac{-b}{۲a}=\frac{۶}{۲\times۹}=\frac{۱}{۳}$$
$$۹x^{۲}+۶x+۱=۹\left(x-\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=(۳x-۱)^{۲}$$

نکته: برای این‌که یک سه‌جمله‌ای درجه‌ی دوم به حاصل‌ضرب چند عبارت با ضرایب صحیح تجزیه شود لازم است که مبین معادله مجذور کامل باشد.

معادله‌ی دومجذوری: معادله‌ی درجه‌ی چهارمی که بتوان آن‌را به صورت زیر نوشت معادله‌ی دومجذوری نامیده می‌شود.

$$ax^{۴}+bx^{۲}+c=۰ \qquad (۱)$$

ملاحظه می‌شود که در این معادله ضرایب جملات درجه‌ی سوم و درجه‌ی اول صفرند.

برای حل معادله‌ی فوق $x^{۲}$ را مساوی y می‌گیریم ($x^{۲}=y$)، معمولاً y را مجهول معاون می‌نامند. با فرض $x^{۲}=y$ معادله‌ی (۱) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود که آن‌را معادله‌ی حلّال می‌نامند.

$$ay^{۲}+by+c=۰ \qquad (۲)$$

چون y نباید منفی باشد به ازای هر ریشه مثبت از معادله‌ی (۲) دو ریشه‌ی قرینه برای معادله‌ی (۱) به‌دست می‌آید. اگر معادله‌ی (۲) ریشه‌ی صفر داشته باشد معادله‌ی (۱) نیز ریشه‌ی صفر خواهد داشت. اگر معادله‌ی حلّال ریشه‌ی مثبت نداشته باشد معادله‌ی دومجذوری ریشه نخواهد داشت.

مثال ۳۳: معادله‌ی $x^{۴}-۵x^{۲}+۴=۰$ را حل کنید.

حل:

$$x^{۲}=y \Rightarrow y^{۲}-۵y+۴=۰$$

معادله حلّال دو ریشه‌ی مثبت دارد. بنابراین معادله‌ی دومجذوری چهار ریشه دارد.

$$y=\frac{۵\pm\sqrt{۵^{۲}-۴\times۴}}{۲}=\frac{۵\pm\sqrt{۹}}{۲}=\frac{۵\pm۳}{۲}$$

$$y'=\frac{۵+۳}{۲}=۴ \Rightarrow x^{۲}=۴ \Rightarrow x=\pm۲$$

$$y''=\frac{۵-۳}{۲}=۱ \Rightarrow x^{۲}=۱ \Rightarrow x=\pm۱$$

مثال ۳۴: معادله‌ی $۲x^{۴}-۱۳x^{۲}-۴۵=۰$ را حل کنید.

حل:

$$x^{۲}=y \Rightarrow ۲y^{۲}-۱۳y-۴۵=۰$$

با توجه به این‌که $\frac{c}{a}$ معادله‌ی حلال منفی است می‌توان گفت معادله حلال یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد. بنابراین معادله‌ی دومجذوری فقط دو ریشه دارد.

$$y=\frac{۱۳\pm\sqrt{۱۳^۲-۴\times۲\times(-۴۵)}}{۴}=\frac{۱۳\pm\sqrt{۱۶۹+۳۶۰}}{۴}=\frac{۱۳\pm\sqrt{۵۲۹}}{۴}=\frac{۱۳\pm۲۳}{۴}$$

$$y'=\frac{۱۳+۲۳}{۴}=\frac{۳۶}{۴}=۹\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=\pm۳$$

$y''=\frac{۱۳-۲۳}{۴}=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow$ معادله اولیه ریشه حقیقی ندارد

مثال ۳۵ : معادله‌ی $۵x^۴+۸۰x^۲+۳۲=۰$ را حل کنید.

حل:

$$x^۲=y\Rightarrow ۵y^۲+۸۰y+۳۲=۰$$

این معادله دارای دو ریشه است. زیرا $\Delta=۱۶۰۰-۱۶۰=۱۴۴۰$ مثبت است و چون حاصل‌ضرب دو ریشه $\frac{۳۲}{۵}$ و مجموع دو ریشه $-\frac{۸۰}{۵}$ است می‌توان گفت هر دو ریشه‌ی معادله حلّال منفی است. لذا معادله‌ی دومجذوری ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۳۶ : چند نفر ۱۰۸۰۰ تومان بدهکارند که باید به طور مساوی آن‌را بپردازند. دو نفر قادر به پرداخت سهم خود نمی‌باشند. به ناچار بقیه هرکدام باید ۹۰۰ تومان اضافه بپردازند. تعداد نفرات را به‌دست آورید.

حل:

فرض می‌کنیم تعداد نفرات x باشد.

$$\frac{۱۰۸۰۰}{x-۲}-\frac{۱۰۸۰۰}{x}=۹۰۰$$

$$\frac{۱}{x-۲}-\frac{۱}{x}=\frac{۹۰۰}{۱۰۸۰۰}\Rightarrow\frac{x-x+۲}{x^۲-۲x}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$x^۲-۲x=۲۴\Rightarrow x^۲-۲x-۲۴=۰$$

$$x=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۲۴}}{۱}=۱\pm\sqrt{۲۵}=۱\pm۵$$

$x=۱+۵=۶$ یا $x=۱-۵=-۴$ غ‌ق‌ق

مثال ۳۷ : **حوضی دارای دو شیر A و B می‌باشد. مدت پر شدن حوض به وسیله‌ی شیر A، ۲۲ دقیقه بیش‌تر از مدت پر شدن آن به وسیله‌ی شیر B است. اگر هر دو شیر A و B با هم باز باشند حوض در مدت یک ساعت پر می‌شود. معین کنید هریک از شیرها به تنهایی حوض را در چه مدتی پر می‌کنند؟**

حل:

فرض می‌کنیم شیر B حوض را در x دقیقه پر کند.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+22}=\frac{1}{60}$$

$$\frac{x+22+x}{x^2+22x}=\frac{1}{60}\Rightarrow x^2+22x=120x+1320$$

$$x^2-98x-1320=0\Rightarrow x=\frac{49\pm\sqrt{49^2+1320}}{1}=49\pm\sqrt{3721}$$

$$x_1=49+61=110$$

$$x_2=49-61=-12 \quad \text{غ‌ق‌ق}$$

بنابراین شیر B حوض را در ۱۱۰ دقیقه و شیر A آن‌را در ۱۳۲ دقیقه پر می‌کنند.

قضیه: اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز یا مساوی باشد، ثابت کنید مجموع آن‌ها مساوی $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها مساوی $\frac{c}{a}$ خواهد بود.

برهان: اولاً: اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد، مبین آن یعنی $\Delta=b^2-4ac$ مثبت است و داریم:

حل:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\quad,\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

ثانیاً: اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، آن‌گاه: $b^2 = 4ac$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b}{2a}\right) \times \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

مثال ۳۸ : مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 2x - 1 = 0$ چیست؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$$

☆ محاسبه‌ی عباراتی که برحسب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم متقارن هستند

عبارتی را برحسب x_1 و x_2 متقارن گویند درصورتی‌که در آن عبارت با تبدیل x_1 به x_2 و x_2 به x_1 تغییری حاصل نشود. مثلاً عبارات $x_1 + x_2$ و $x_1^2 + x_2^2$ و $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ متقارن هستند. ثابت می‌شود هر عبارتی را که برحسب x_1 و x_2 متقارن باشد می‌توان برحسب $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 x_2$ نوشت.

مثال ۳۹ : اگر S و P مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ و x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند عبارات $x_1^2 + x_2^2$ و $x_1^3 + x_2^3$ را برحسب S و P بنویسید.

حل:

$$x_۱^۲+x_۲^۲=(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲=S^۲-۲P$$

$$x_۱^۳+x_۲^۳=(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)=S^۳-۳PS$$

مثال ۴۰ : اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲-۳x-۳=۰$ باشند مقدار عبارات زیر را حساب کنید. (بدون حل معادله).

الف) $\frac{۱}{x_۱^۲}+\frac{۱}{x_۲^۲}$ ب) $\frac{۱}{x_۱^۳}+\frac{۱}{x_۲^۳}$

ج) $(x_۱-۳)^۲+(x_۲-۳)^۲$

حل:

الف) $$\frac{۱}{x_۱^۲}+\frac{۱}{x_۲^۲}=\frac{x_۲^۲+x_۱^۲}{x_۱^۲x_۲^۲}=\frac{(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲}{(x_۱x_۲)^۲}=\frac{S^۲-۲P}{P^۲}$$

$$=\frac{\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲-۲\times-\frac{۳}{۲}}{\left(-\frac{۳}{۲}\right)^۲}=\frac{\frac{۹}{۴}+۳}{\frac{۹}{۴}}=\frac{\frac{۲۱}{۴}}{\frac{۹}{۴}}=\frac{۷}{۳}$$

ب) $$\frac{۱}{x_۱^۳}+\frac{۱}{x_۲^۳}=\frac{x_۲^۳+x_۱^۳}{x_۱^۳x_۲^۳}=\frac{(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)}{(x_۱x_۲)^۳}=\frac{S^۳-۳PS}{P^۳}$$

$$=\frac{\left(\frac{۳}{۲}\right)^۳-۳\times\left(-\frac{۳}{۲}\right)\times\frac{۳}{۲}}{\left(-\frac{۳}{۲}\right)^۳}=\frac{\frac{۲۷}{۸}+\frac{۲۷}{۴}}{-\frac{۲۷}{۸}}=\frac{\frac{۸۱}{۸}}{-\frac{۲۷}{۸}}=-۳$$

ج) $$(x_۱-۳)^۲+(x_۲-۳)^۲=x_۱^۲-۶x_۱+۹+x_۲^۲-۶x_۲+۹$$

$$=(x_۱^۲+x_۲^۲)-۶(x_۱+x_۲)+۱۸=(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲-۶(x_۱+x_۲)+۱۸$$

$$=S^{۲}-۲P-۶S+۱۸=\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}-۲\left(-\frac{۳}{۲}\right)-۶\left(\frac{۳}{۲}\right)+۱۸$$

$$=\frac{۹}{۴}+۳-۹+۱۸=\frac{۹}{۴}+۱۲=\frac{۵۷}{۴}$$

مثال ۴۱: اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۳x+۴=۰$ باشند بدون حل معادله حاصل $x_۱^{۴}+x_۲^{۴}$ را حساب کنید.

حل:

$S=x_۱+x_۲=۳ \qquad P=x_۱x_۲=۴$

$$x_۱^{۴}+x_۲^{۴}=\left(x_۱^{۲}+x_۲^{۲}\right)^{۲}-۲x_۱^{۲}x_۲^{۲}=\left[(x_۱+x_۲)^{۲}-۲x_۱x_۲\right]^{۲}-۲(x_۱x_۲)^{۲}$$

$$=\left(S^{۲}-۲P\right)^{۲}-۲P^{۲}=(۹-۸)^{۲}-۲\times ۱۶=۱-۳۲=-۳۱$$

☆ بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

در بعضی موارد لازم است بدون محاسبه‌ی ریشه‌ها، در این‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای ریشه است یا خیر و یا این‌که علامت ریشه‌های آن مثبت است یا منفی تحقیق کنیم. اکنون به بررسی این مطلب می‌پردازیم.

معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ را درنظر بگیرید.

اولاً: اگر $\frac{c}{a}<۰$ در این صورت a و c مختلف‌العلامه هستند و معادله دارای دو ریشه‌ی متمایز است. این دو ریشه مختلف‌العلامعه هستند. زیرا حاصل‌ضربشان منفی است.

ثانیاً: اگر $\frac{c}{a}=۰$ $(c=۰)$ در این حالت یکی از ریشه‌ها صفر است و ریشه‌ی دیگر مساوی $-\frac{b}{a}$ می‌باشد.

ثالثاً: اگر $\frac{c}{a}>۰$ در این حالت چون مشخص نیست که معادله ریشه دارد یا خیر، باید Δ را

تشکیل داد. اگر $\Delta < ۰$، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

اگر $\Delta \geq ۰$ معادله دارای دو ریشه است که چون حاصل‌ضربشان مثبت است هم‌علامت می‌باشند و علامت مشترک آن‌ها علامت $\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

مثال ۴۲: بدون حل کردن معادله $-۱۰۰x^۲ + x + ۵۷ = ۰$ در وجود و علامت ریشه‌های معادله بحث کنید.

حل:

چون $\frac{c}{a} = -\frac{۵۷}{۱۰۰}$ عددی منفی است پس معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه دارد. همچنین چون $-\frac{b}{a} = \frac{۱}{۱۰۰}$ عددی مثبت است. پس ریشه‌ای که قدرمطلقش بزرگ‌تر است مثبت است.

مثال ۴۳: بدون حل کردن معادله‌ی $۵x^۲ + ۳۵x + ۲ = ۰$ در وجود و علامت ریشه‌های معادله بحث کنید.

حل:

چون در این معادله $\frac{c}{a} = \frac{۲}{۵}$ عددی مثبت است نمی‌توانیم بگوییم معادله ریشه دارد یا خیر و باید مبین معادله را تشکیل دهیم.

$$\Delta = ۳۵^۲ - ۴ \times ۵ \times ۲ = ۱۱۸۵$$

چون مبین معادله مثبت است معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد و چون حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت است می‌توان گفت دو ریشه هم‌علامتند و چون $-\frac{b}{a} = -۷$ یعنی مجموع ریشه‌ها منفی است می‌توان گفت معادله دو ریشه‌ی منفی دارد.

مثال ۴۴: مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی معکوس داشته باشد.

$$mx^۲ + ۱۳x + ۲m - ۱ = ۰$$

حل:

برای این‌که معادله دو ریشه‌ی معکوس داشته باشد باید مبین معادله مثبت و ضرب ریشه‌ها برابر یک باشد.

$$\frac{c}{a}=۱ \Rightarrow \frac{۲m-۱}{m}=۱ \Rightarrow ۲m-۱=m \Rightarrow m=۱$$

به ازای $m=۱$ معادله به صورت $x^۲+۱۳x+۱=۰$ درمی‌آید که مبین آن مثبت است.

مثال ۴۵ : مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد.

$$x^۲-(m+۵)x+۲m=۰$$

حل:

برای این‌که معادله دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد باید مبین معادله مثبت و مجموع ریشه‌های معادله صفر باشد.

$$\frac{-b}{a}=۰ \Rightarrow \frac{m+۵}{۱}=۰ \Rightarrow m=-۵$$

به ازای $m=-۵$ معادله به صورت $x^۲-۱۰=۰$ درمی‌آید که مبین آن مثبت است.

مثال ۴۶ : مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر یک ریشه‌ی صفر داشته باشد.

$$(m+۱)x^۲-mx+(۳m-۶)=۰$$

حل:

$$\frac{c}{a}=۰ \Rightarrow \frac{۳m-۶}{m+۱}=۰ \Rightarrow ۳m-۶=۰ \Rightarrow m=۲$$

مثال ۴۷ : حدود t را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی منفی داشته باشد.

$$x^۲+۴x+t+۲=۰$$

حل:

$$\Delta'>۰ \Rightarrow ۴-(t+۲)>۰ \Rightarrow ۲-t>۰ \Rightarrow t<۲$$

$$\frac{c}{a}>۰ \rightarrow t+۲>۰ \Rightarrow t>-۲$$

$$-\frac{b}{a}<۰ \Rightarrow -۴<۰$$

بنابراین برای این‌که معادله دو ریشه‌ی منفی داشته باشد باید $-۲<t<۲$.

مثال ۴۸ : مقدار m را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله‌ی زیر رابطه‌ی $x_۱^۲+x_۲^۲=۱۰$ برقرار باشد.

$$x^۲-(m-۱)x+\frac{m+۱}{۲}=۰$$

حل:

$$x_۱^۲+x_۲^۲=۱۰ \Rightarrow (x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲=۱۰$$

$$(m-۱)^۲-۲(\frac{m+۱}{۲})=۱۰ \Rightarrow m^۲-۲m+۱-m-۱=۱۰$$

$$m^۲-۳m-۱۰=۰ \Rightarrow (m-۵)(m+۲)=۰ \Rightarrow m=۵ \quad \text{یا} \quad m=-۲$$

مثال ۴۹ : مقدار m را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله‌ی:

$$mx^۲-۲(m-۲)x+m-۳=۰$$

رابطه‌ی $۴(x_۱+x_۲)=۷x_۱x_۲$ برقرار باشد.

حل:

$$۴(x_۱+x_۲)=۷x_۱x_۲ \Rightarrow ۴S=۷P$$

$$\Rightarrow ۴\times\frac{۲(m-۲)}{m}=۷\times\frac{m-۳}{m} \Rightarrow \frac{۸m-۱۶}{m}=\frac{۷m-۲۱}{m}$$

$$\Rightarrow ۸m-۱۶=۷m-۲۱ \Rightarrow \boxed{m=-۵}$$

مثال ۵۰ : مقدار m را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله‌ی:

$$mx^۲-۲(m-۱)x+m=۰$$

رابطه‌ی $x_۱+۲x_۲=۳$ برقرار باشد.

حل:

$$\begin{cases} x_۱+۲x_۲=۳ \\ x_۱+x_۲=\frac{۲m-۲}{m} \\ x_۱\times x_۲=۱ \end{cases} \Rightarrow x_۲=۳-\frac{۲m-۲}{m}=\frac{۳m-۲m+۲}{m}=\frac{m+۲}{m}$$

$$x_۱=\frac{۲m-۲}{m}-\frac{m+۲}{m}=\frac{۲m-۲-m-۲}{m}=\frac{m-۴}{m}$$

$$x_۱\times x_۲=۱ \Rightarrow \frac{m-۴}{m}\times\frac{m+۲}{m}=۱ \Rightarrow m^۲-۲m-۸=m^۲$$

$$\Rightarrow -۲m=۸ \Rightarrow \boxed{m=-۴}$$

☆ تعیین دو عدد که مجموع و حاصل‌ضربشان معلوم است

دو عدد معلوم S و P را درنظر گرفته، می‌خواهیم دو عدد α و β را پیدا کنیم به‌طوری‌که داشته باشیم $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\times\beta=P$.

اگر α و β با این شرایط وجود داشته باشند واضح است که می‌توان آن‌ها را ریشه‌های معادله‌ی مقابل دانست. $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Rightarrow x^2-Sx+P=0$$

بنابراین اگر دو عدد وجود داشته باشند که مجموعشان S و حاصل‌ضربشان P باشد، آن دو عدد ریشه‌های معادله‌ی $x^2-Sx+P=0$ هستند.

مثال ۵۱ : دو عدد پیدا کنید که مجموعشان ۲۴ و حاصل‌ضربشان ۱۴۳ باشد.

حل:

در این‌جا داریم: $S=24\ P=143$

پس کافی است معادله‌ی درجه‌ی دوم مقابل را حل کنیم. $x^2-24x+143=0$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144-143}}{1}$$

$$x_1=12+1=13$$

$$x_2=12-1=11$$

☆ تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن دو عدد معلوم باشند

اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی α و β باشند، آن معادله هم‌ارز با معادله‌ی $(x-\alpha)(x-\beta)$ است که این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

مثال ۵۲ : معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن ۵ و ۳- باشند.

حل:

$$S=5+(-3)=2$$

$$P=5\times(-3)=-15$$

$$x^2-2x-15=0$$

مثال ۵۳ : **معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ مفروض است. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد.**

حل:

راه اول: اگر ریشه‌های معادله‌ی مفروض را x_1 و x_2 بنامیم برای معادله‌ی جدید داریم:

$$S=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$P=2x_1\times 2x_2=4x_1x_2=\frac{4c}{a}$$

بنابراین معادله‌ی جدید به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$x^2-\left(\frac{-2b}{a}\right)x+\frac{4c}{a}=0 \Rightarrow ax^2+2bx+4c=0$$

راه دوم: روش دیگر برای یافتن معادله فوق این است که رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی قدیم و معادله‌ی جدید را به صورت $y=2x$ درنظر گرفته و از آن x را برحسب y به‌دست آورده و در معادله‌ی قدیم قرار دهیم.

$$x=\frac{y}{2} \Rightarrow a\left(\frac{y}{2}\right)^2+b\left(\frac{y}{2}\right)+c=0$$

$$\Rightarrow ay^2+2by+4c=0$$

مثال ۵۴ : **معادله‌ی درجه‌ی دومی را بنویسید که ریشه‌هایش یک واحد بیش‌تر از ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد.**

حل:

روش اول: اگر ریشه‌های معادله‌ی مفروض را x_1 و x_2 بنامیم برای معادله‌ی جدید خواهیم داشت:

$$S=(x_1+1)+(x_2+1)=x_1+x_2+2=\frac{-b}{a}+2=\frac{2a-b}{a}$$

$$P=(x_1+1).(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=\frac{c}{a}+\left(\frac{-b}{a}\right)+1=\frac{c-b+a}{a}$$

$$x^2-\left(\frac{2a-b}{a}\right)x+\frac{c-b+a}{a}=0 \Rightarrow ax^2-(2a-b)x+(c-b+a)=0$$

روش دوم: $y=x+1 \Rightarrow x=y-1$

$$a(y-1)^2+b(y-1)+c=0 \Rightarrow ay^2-2ay+a+by-b+c=0$$

$$ay^2-(2a-b)y+(a-b+c)=0$$

مثال ۵۵ : معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند.

حل:

$$S=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$$

$$P=\frac{1}{x_1}\times\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}$$

$$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0 \Rightarrow cx^2+bx+a=0$$

ملاحظه می‌شود جای a و c عوض شده است.

مثال ۵۶ : مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+1=0$ ریشه‌ی مضاعفی برابر یک داشته باشد.

حل:

$$\begin{cases} b^2-4a=0 \\ \frac{-b}{2a}=1 \Rightarrow b=-2a \end{cases}$$

$$b^2-4a=0 \Rightarrow (-2a)^2-4a=0 \Rightarrow 4a^2-4a=0$$

$$4a(a-1)=0 \xrightarrow{a\neq 0} a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$b=-2a=-2\times 1=-2$$

مثال ۵۷ : اگر a ، b و c اعداد گویا باشند ثابت کنید ریشه‌های معادله‌ی زیر گویا هستند.

$$(a-b+c)x^{۲}+۲cx-(a-b-c)=۰$$

حل:

کافی است نشان دهیم مبین معادله مجذور کامل است.

$$\Delta'=c^{۲}+(a-b+c)(a-b-c)=c^{۲}+(a-b)^{۲}-c^{۲}=(a-b)^{۲}$$

مثال ۵۸ : ثابت کنید معادله‌ی $\frac{۱}{x-a}+\frac{۲}{x-b}=۱$ همواره دو ریشه دارد. $(a\neq b)$.

حل:

$$\frac{۱}{x-a}+\frac{۲}{x-b}=۱\Rightarrow x-b+۲x-۲a=(x-a)(x-b)$$

$$۳x-b-۲a=x^{۲}-(a+b)x+ab\ \Rightarrow\ x^{۲}-(a+b+۳)x+ab+b+۲a=۰$$

$$\Delta=(a+b+۳)^{۲}-۴(ab+b+۲a)$$

$$=a^{۲}+b^{۲}+۹+۲ab+۶a+۶b-۴ab-۴b-۸a=a^{۲}+b^{۲}+۹-۲ab-۲a+۲b$$

$$=a^{۲}+b^{۲}+۱-۲ab-۲a+۲b+۸=(a-b-۱)^{۲}+۸>۰$$

مبین معادله همواره مثبت است. لذا معادله‌ی فوق همواره دو ریشه دارد.

مثال ۵۹ : معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۵x+۶=۰$ باشد. (بدون حل معادله)

حل:

اگر ریشه‌های معادله‌ی مفروض را $x_{۱}$ و $x_{۲}$ بنامیم برای معادله‌ی جدید خواهیم داشت.

$$S=x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}=(x_{۱}+x_{۲})^{۲}-۲x_{۱}x_{۲}=۵^{۲}-۲\times۶=۲۵-۱۲=۱۳$$

$$P=x_{۱}^{۲}.x_{۲}^{۲}=(x_{۱}.x_{۲})^{۲}=۶^{۲}=۳۶$$

$$x^{۲}-۱۳x+۳۶=۰$$

مثال ۶۰ : α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-cx+d=۰$ و α ریشه‌ی مضاعف معادلـه‌ی $x^{۲}-ax+b=۰$ است. ثابت کنید: $ac=۲(b+d)$.

✎ حل:

$$\alpha\beta = d$$

$$\alpha = \frac{a}{۲} \Rightarrow \begin{array}{l} a = ۲\alpha \\ c = \alpha + \beta \end{array}$$

$$ac = ۲\alpha(\alpha + \beta) \Rightarrow ac = ۲(\alpha^۲ + \alpha\beta)$$

$$\alpha \times \alpha = b \Rightarrow \alpha^۲ = b \Rightarrow ac = ۲(b + d)$$

☆ معادله‌های معکوسه

به معادله‌ای معکوسه گوییم که اگر α یک ریشه‌ی آن باشد $\frac{۱}{\alpha}$ یا $-\frac{۱}{\alpha}$ هم‌ریشه‌ی معادله باشد. که در صورت اول معادله را معکوسه‌ی مثبت و در صورت دوم آن را معکوسه‌ی منفی می‌نامند. به عبارت دیگر معادله معکوسه‌ی مثبت معادله‌ای است که با تبدیل x به $\frac{۱}{x}$ به خودش تبدیل شود و معادله‌ی معکوسه‌ی منفی معادله‌ای است که با تبدیل x به $-\frac{۱}{x}$ به خودش تبدیل شود. به عنوان مثال معادله‌ی $ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ + bx + a = ۰$ معادله‌ی معکوسه‌ی مثبت و معادله‌ی $ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ - bx + a = ۰$ معادله‌ی معکوسه‌ی منفی است. از این تعریف نتیجه‌های زیر مستقیماً به‌دست می‌آید:

۱) معادله‌ی معکوسه‌ی منفی نمی‌تواند از درجه‌ی فرد باشد زیرا مثلاً برای این‌که معادله‌ی درجه‌ی سوم (۱) $ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$ معکوسه‌ی منفی باشد باید با تبدیل x به $-\frac{۱}{x}$ تغییر نکند. x را به $-\frac{۱}{x}$ تبدیل می‌کنیم:

$$-\frac{a}{x^۳} + \frac{b}{x^۲} - \frac{c}{x} + d = ۰ \Rightarrow dx^۳ - cx^۲ + bx - a = ۰ \qquad (۲)$$

برای این‌که معادله‌های (۱) و (۲) هم‌ارز باشند باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{d} = -\frac{d}{a} \Rightarrow a^۲ = -d^۲$$

که غیرممکن است.

۲) اگر معادله‌ی معکوسه‌ی مثبت از درجه‌ی فرد باشد، حتماً ریشه‌ای مساوی ۱ یا ۱− دارد. زیرا این دو عدد تنها اعدادی هستند که باعکس خود برابرند.

بنابراین سمت چپ معادله‌ی معکوسه‌ی مثبت وقتی از درجه‌ی فرد باشد بر $x-1$ یا $x+1$ قابل قسمت است که پس از تقسیم به معادله‌ی معکوسه از درجه‌ی زوج خواهیم رسید.
با این مقدمه روشن می‌شود که برای بحث در حل معادلات معکوسه کافی است به معادلات معکوسه از درجه‌ی زوج بپردازیم.
معادله‌ی زیر را که از درجه‌ی $2n$ است درنظر می‌گیریم:

$$ax^{2n}+bx^{2n-1}+cx^{2n-2}+...+fx^{n}+...+mx^{2}+nx+p=0 \qquad (1)$$

برای این‌که این معادله معکوسه‌ی مثبت باشد باید با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ تغییر نکند. با این تبدیل به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$px^{2n}+nx^{2n-1}+mx^{2n-2}+...+fx^{n}+...+cx^{2}+bx+a=0 \qquad (2)$$

برای این‌که معادله‌های (۱) و (۲) هم ارز باشند باید ضریب‌های متناسبی داشته باشند. یعنی:

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{n}=\frac{c}{m}=...=\frac{f}{f}=...=\frac{m}{c}=\frac{n}{b}=\frac{p}{a}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$a=p \ , \ b=n \ , \ c=m \ , \ ...$$

یعنی برای این‌که معادله‌ای معکوسه‌ی مثبت باشد باید ضریب‌های جملات متساوی‌الافاصله از دو طرف برابر باشند.
به همین ترتیب می‌توان گفت در معادله‌ی معکوسه‌ی منفی، وقتی بزرگ‌ترین توان مضربی از ۴ باشد ضرایب توان‌های زوج از دو طرف با هم مساوی و ضرایب توان‌های فرد از دو طرف قرینه‌ی یک‌دیگرند و وقتی بزرگ‌ترین توان مضربی از ۴ نباشد (یعنی در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌اش ۲ شود) ضرایب توان‌های زوج از دو طرف قرینه‌ی یک‌دیگر و ضرایب توان‌های فرد از دو طرف مساوی یک‌دیگرند.

در حل معادلات معکوسه‌ی مثبت $x+\frac{1}{x}$ و در معادلات معکوسه‌ی منفی $x-\frac{1}{x}$ به عنوان مجهول کمکی درنظر گرفته می‌شود.

مثال ۶۱ : معادله‌ی $2x^{4}-13x^{3}+24x^{2}-13x+2=0$ را حل کنید.

حل:

دو طرف معادله را بر $x^{۲}$ که مخالف صفر است تقسیم می‌کنیم.

$$۲x^{۲}-۱۳x+۲۴-\frac{۱۳}{x}+\frac{۲}{x^{۲}}=۰$$

$$۲\left(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}\right)-۱۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)+۲۴=۰ \qquad x+\frac{۱}{x}=y$$

$$۲\left[\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۲}-۲\right]-۱۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)+۲۴=۰$$

$$۲(y^{۲}-۲)-۱۳y+۲۴=۰ \Rightarrow ۲y^{۲}-۱۳y+۲۰=۰$$

$$y=\frac{۱۳\pm\sqrt{۱۶۹-۴\times۲\times۲۰}}{۴}=\frac{۱۳\pm\sqrt{۹}}{۴}=\frac{۱۳\pm۳}{۴}$$

$$y_{۱}=\frac{۱۳+۳}{۴}=۴ \qquad y_{۲}=\frac{۱۳-۳}{۴}=\frac{۵}{۲}$$

$$y=۴ \Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۴ \Rightarrow x^{۲}-۴x+۱=۰ \Rightarrow x_{۱}=۲+\sqrt{۳}\ ,\ x_{۲}=۲-\sqrt{۳}$$

$$y=\frac{۵}{۲} \Rightarrow x+\frac{۱}{x}=\frac{۵}{۲} \Rightarrow ۲x^{۲}-۵x+۲=۰ \Rightarrow x_{۳}=۲\ ,\ x_{۴}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۶۲: معادله‌ی $۳x^{۳}-۱۳x^{۲}+۱۳x-۳=۰$ را حل کنید.

حل:

$$۳(x^{۳}-۱)-۱۳x(x-۱)=۰$$

$$۳(x-۱)(x^{۲}+x+۱)-۱۳x(x-۱)=۰$$

$$(x-۱)(۳x^{۲}+۳x+۳-۱۳x)=۰$$

$$(x-۱)(۳x^{۲}-۱۰x+۳)=۰ \Rightarrow x-۱=۰ \Rightarrow \boxed{x_{۱}=۱}$$

$$۳x^{۲}-۱۰x+۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵-۹}}{۳}=\frac{۵\pm۴}{۳}$$

$x_2 = \frac{5+4}{3} = 3$ $\qquad$ $x_3 = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$

مثال ۶۳ : معادله‌ی $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 6 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0 \qquad x - \frac{1}{x} = y$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow y_1 = -1 \ , \ y_2 = 4$$

$$y_1 = -1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y_2 = 4 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

مثال ۶۴ : معادله‌ی $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$ را حل کنید.

حل:

دو طرف معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم.

$$\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9$$

با فرض $2x + \frac{1}{x} = y$ خواهیم داشت:

$$(y - 3)(y + 5) = 9 \Rightarrow y^2 + 2y - 15 = 9 \Rightarrow y^2 + 2y - 24 = 0$$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 + 24} = -1 \pm 5 \Rightarrow y_1 = 4 \ , \ y_2 = -6$$

$$۲x+\frac{۱}{x}=۴ \Rightarrow ۲x^{۲}-۴x+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲} \\ x_{۲}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

$$۲x+\frac{۱}{x}=-۶ \Rightarrow ۲x^{۲}+۶x+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=\frac{-۳-\sqrt{۷}}{۲} \\ x_{۲}=\frac{-۳+\sqrt{۷}}{۲} \end{cases}$$

مثال ۶۵ : معادله‌ی $(۶-x)^{۴}+(۸-x)^{۴}=۱۶$ را حل کنید.

حل:

$$y=\frac{۶-x+۸-x}{۲}=۷-x \Rightarrow x=۷-y$$

$$(y-۱)^{۴}+(y+۱)^{۴}=۱۶$$

$$y^{۴}-۴y^{۳}+۶y^{۲}-۴y+۱+y^{۴}+۴y^{۳}+۶y^{۲}+۴y+۱=۱۶$$

$$۲y^{۴}+۱۲y^{۲}-۱۴=۰ \Rightarrow y^{۴}+۶y^{۲}-۷=۰ \Rightarrow y^{۲}=۱ \text{ یا } y^{۲}=-۷$$

$$\Rightarrow y=\pm ۱$$

$$y=۱ \Rightarrow x=۷-۱=۶$$

$$y=-۱ \Rightarrow x=۷+۱=۸$$

☆ ریشه‌های گویای معادلات جبری

قضیه: برای این‌که کسر ساده‌نشدنی $\frac{p}{q}$ که در آن $q\neq ۰$، ریشه‌ی معادله‌ی $a_n x^{n}+a_{n-۱}x^{n-۱}+a_{n-۲}x^{n-۲}+...+a_{۰}=۰$ ، $(a_n\neq ۰)$ باشد، باید عدد p مقسوم‌علیه مقدار ثابت $a_{۰}$ و عدد q مقسوم‌علیه ضریب بزرگ‌ترین درجه، یعنی a_n باشد.

نتیجه: اگر در معادله‌ی با ضرایب صحیح، ضریب بزرگ‌ترین درجه، یعنی a_n برابر واحد باشد و اگر معادله ریشه‌های گویا داشته باشد، این ریشه‌های گویا اعداد صحیح‌اند که در ضمن، جزو مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت $a_{۰}$ هستند.

هر معادله با ضرایب گویا را می‌توان با ضرب کردن طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها، به معادله‌ای با ضرایب صحیح تبدیل کرد.

در معادله‌ی $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = 0$ که ضرایب آن اعداد صحیح هستند هر ریشه‌ی صحیح معادله یک مقسوم‌علیه a_0 است زیرا اگر x_0 یک ریشه‌ی صحیح معادله‌ی فوق باشد خواهیم داشت:

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_{n-2} x_0^{n-2} + ... + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = -x_0 (a_n x_0^{n-1} + a_{n-1} x_0^{n-2} + ... + a_1) = 0$$

با توجه به این‌که حاصل پرانتز عددی صحیح است a_0 بر x_0 بخش‌پذیر است.

مثال ۶۶ : معادله‌ی $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = 0$ را حل کنید.

حل:

چون ضرایب این معادله اعداد صحیح‌اند، اگر این معادله ریشه‌ی صحیح داشته باشد آن ریشه باید ± 1 یا ± 5 باشد. ملاحظه می‌کنیم عدد یک در معادله صدق می‌کند. بنابراین عبارت $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است.

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x^3 + 3x^2 + x - 5)$$

$$= (x-1)(x-1)(x^2 + 4x + 5) = (x-1)^2 (x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{یا} \\ x^2 + 4x + 5 = 0 \quad \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \end{cases}$$

مثال ۶۷ : معادله‌ی $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ را حل کنید.

حل:

چون معادله، معادله‌ای متقارن از درجه‌ی فرد است بنابراین $x = -1$ یکی از ریشه‌های آن است.

$$2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = (x+1)(2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2) = 0$$

اکنون به حل معادله‌ی متقارن درجه‌ی چهارم، که از این‌جا به‌دست می‌آید می‌پردازیم:

$$2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$$

$$۲x^۲ + x - ۶ + \frac{۱}{x} + \frac{۲}{x^۲} = ۰ \Rightarrow ۲\left(x^۲ + \frac{۱}{x^۲}\right) + \left(x + \frac{۱}{x}\right) - ۶ = ۰$$

$$۲\left(x + \frac{۱}{x}\right)^۲ - ۴ + \left(x + \frac{۱}{x}\right) - ۶ = ۰ \Rightarrow ۲\left(x + \frac{۱}{x}\right)^۲ + \left(x + \frac{۱}{x}\right) - ۱۰ = ۰$$

$$۲y^۲ + y - ۱۰ = ۰ \Rightarrow y_۱ = ۲ \ , \ y_۲ = \frac{-۵}{۲}$$

$$x + \frac{۱}{x} = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۱$$

$$x + \frac{۱}{x} = \frac{-۵}{۲} \Rightarrow ۲x^۲ + ۵x + ۲ = ۰ \Rightarrow x_۲ = -۲ \ , \ x_۳ = \frac{-۱}{۲}$$

تمرین‌های فصل دوازدهم

۱. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $4x^2 - 8x = 0$

ب) $3x^2 - 5 = 70$

ج) $(x+2)(x+3) = 6$

د) $(x+1)^2 - 2x - 2 = 0$

هـ) $2x^2 - 8 = 0$

و) $(2x-1)^2 - (x-1)^2 = 0$

۲. معادلات زیر را با مربع کامل‌سازی حل کنید.

الف) $x^2 - 12x + 35 = 0$

ب) $2x^2 - 5x - 12 = 0$

ج) $5x^2 + 6x - 8 = 0$

د) $x^2 - 6x + 9 = 0$

۳. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

ب) $7x^2 - 5x - 2 = 0$

ج) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

د) $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$

هـ) $(5x-3)(x-5) = (2x+5)^2 + 90$

و) $(x^2-1)^2 - 3(x^2-1) + 2 = 0$

ز) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

ح) $x + \frac{1}{x-3} = 5$

ط) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$

ی) $\frac{5x-1}{x+1} = \frac{3x}{2}$

ک) $\frac{3x-1}{4x+7} = 1 - \frac{6}{x+7}$

ل) $\frac{x-5}{x-7} + \frac{x-7}{x-5} + 2 = 0$

ن) $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} + 2 = 0$

م) $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{4}{2x^2-2x}$

۴. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $4x^4+3x^2-1=0$

ب) $x^2-1379x+1378=0$

ج) $x^6-19x^3-216=0$

د) $x^8-97x^4-1296=0$

و) $(x+1)^4-13(x+1)^2+36=0$

ز) $(x+1)^3-(x-2)^3=63$

ح) $(x+1)^6+8=7(x+1)^3$

ط) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=120$

ی) $7(x+\frac{1}{x})-2(x^2+\frac{1}{x^2})=9$

ک) $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$

ل) $(x^2-4x+5)^2-(x-1)(x-3)=4$

م) $x^2-4x+\frac{10}{x^2-4x+5}=2$

۵. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+6}{x+2}+\frac{x-6}{x-2}$

ب) $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$

ج) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}$

د) $(x+2)^4+(x+5)^4=17$

هـ) $(x+1)^6+(x+5)^6=730$

و) $x^2(x+1)^2+x^2=8(x+1)^2$

ز) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=\frac{40}{9}$

۶. به ازای چه مقداری از m خط $y=mx-9$ بر سهمی $y=x^2$ مماس می‌شود؟

۷. مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$(m+2)x^2-2mx+1=0$$

۸. معادله‌ی زیر به ازای چه مقادیری از a دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

$$(5a-1)x^2-(5a+2)x+3a-2=0$$

۹. مقدار m را چنان تعیین کنید که عدد ۳ یکی از ریشه‌های معادله‌ی زیر باشد. سپس ریشه‌ی دیگر را حساب کنید.

$$x^2+mx+3=0$$

۱۰. مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی برابر داشته باشد و سپس ریشه‌ی مضاعف را حساب کنید.

$$x^۲-(m+۱)x+۱=۰$$

۱۱. مقدار m را چنان تعیین کنید که مبین معادله‌ی زیر برابر ۲۵ باشد.

$$mx^۲+۳x-m=۰$$

۱۲. به ازای چه مقادیری از m عبارت زیر مجذور کامل است؟

$$x^۲+m(m-۱)x+۳۶$$

۱۳. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{(۳-x)^۳+(۴+x)^۳}{(۳-x)^۲+(۴+x)^۲}=۷$$

۱۴. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که هر دو ریشه‌ی معادله‌ی زیر صفر باشند.

$$x^۲+(a^۲+۲b+۲)x+(۴b-۶a)=۰$$

۱۵. حدود m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی مختلف داشته باشد.

$$(m-۱)x^۲-۲mx+(m+۳)=۰$$

۱۶. دستگاه‌های زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} x^۲+y^۲=۸۹ \\ xy=۴۰ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x+y=۱۵ \\ x^۲+y^۲=۲۲۵ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x-y=۴ \\ x^۲+y^۲=۱۰۶ \end{cases}$

د) $\begin{cases} x+y=۹ \\ x^۲+xy+y^۲=۶۱ \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۷}{۱۲} \\ xy=۱۲ \end{cases}$

و) $\begin{cases} \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=۲ \\ x+y=۲ \end{cases}$

۱۷. عددی دورقمی پیدا کنید که مجموع مربعات ارقام آن مساوی با همان عدد به اضافه‌ی حاصل‌ضرب ارقامش باشد و اگر ترتیب نوشتن ارقام آن عدد را تغییر دهیم عدد حاصل ۳۶ واحد از همان عدد بزرگ‌تر شود.

۱۸. شخصی چند متر پارچه به مبلغ ۶۰۰ ریال خرید. اگر با همین مبلغ ۳ متر بیش‌تر پارچه خریده بود هر متر پارچه ۱۰ ریال ارزان‌تر محسوب می‌شد. معین کنید او چند متر پارچه خریده است؟

۱۹. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(b-c)x^{۲}-(c-a)x+(a-b)=۰$

ب) $abcx^{۲}-(a^{۲}b^{۲}+c^{۲})x+abc=۰$

ج) $mx^{۲}-(m^{۲}+n)x+mn=۰$

د) $(m-۲n)x^{۲}-۲mx+m+۲n=۰$ $(n>۰)$

۲۰. معادله‌ی $bx^{۲}-(a+b^{۲})x+ab=۰$ را حل کنید.

۲۱. به ازای چه مقدار از m یکی از ریشه‌های معادله‌ی زیر صفر است؟ پس از تعیین m معادله را حل کنید.

$۱۰x^{۲}-۵x+۳m^{۲}-۸m+۴=۰$

۲۲. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۳x-۱۰=۰$ باشند بدون حل معادله حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $x'^{۲}+x''^{۲}$

ب) $x'^{۳}+x''^{۳}$

ج) $۳x'^{۲}x''+۳x'x''^{۲}$

د) $\frac{۱}{x'^{۲}}+\frac{۱}{x''^{۲}}$

۲۳. مقدار m را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله‌ی زیر رابطه‌ی $x'+x''=۲x'x''$ برقرار باشد.

$(m-۱)x^{۲}-۳mx+۲m+۱=۰$

۲۴. مقدار m را چنان تعیین کنید که مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی زیر برابر ۲۵ باشد.

$x^{۲}+(m-۲)x-(m+۳)=۰$

۲۵. مقدار m را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-mx+۳۶=۰$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد و در این حالت ریشه‌ها را حساب کنید.

$$\frac{۱}{x'}+\frac{۱}{x''}=\frac{۵}{۱۲}$$

۳۴. معادله‌ی $x^{2}-19x+9=0$ را درنظر گرفته و مقدار عددی عبارت $\sqrt{x'}+\sqrt{x''}$ را بدون حل معادله به‌دست آورید.

۳۵. مقدار m را در معادله‌ی زیر طوری پیدا کنید که مجذور تفاضل ریشه‌های آن برابر ۱۶ باشد.

$$x^{2}-2x+m=0$$

۳۶. مطلوبست محاسبه‌ی مقدار m درصورتی‌که تفاضل مجذورات ریشه‌های معادله‌ی $3x^{2}-mx+2=0$ مساوی $\frac{35}{9}$ باشد.

۳۷. a را چنان حساب کنید که رابطه‌ی $3x'x''=2x'-x''$ بین ریشه‌های معادله‌ی زیر برقرار باشد.

$$(14a-1)x^{2}-2ax+1=0$$

۳۸. ضرایب a و b را چنان تعیین کنید که تفاضل ریشه‌های معادله‌ی $x^{2}+ax+b=0$ مساوی ۴ و تفاضل مکعبات ریشه‌ها مساوی ۲۰۸ شود.

۳۹. در معادله‌ی $x^{2}-3x+1=0$ مقدار عددی $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$ و $x_1x_2^{-2}+x_2x_1^{-2}$ را بدون حل معادله به‌دست آورید. $(\sqrt{x_1}>\sqrt{x_2})$

۴۰. m را طوری پیدا کنید که نسبت ریشه‌های معادله‌ی زیر برابر ۲ باشد.

$$9x^{2}-18mx-8m+16=0$$

۴۱. مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی از دو ریشه‌ی معادله‌ی:

$$x^{2}-(3m+1)x+2m^{2}+m=0$$

چهار واحد بزرگ‌تر از دیگری باشد.

۴۲. m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی $x^{3}+(m-1)x+6=0$ دارای ریشه‌ای مساوی ۳− باشد و سایر ریشه‌های معادله را پیدا کنید.

۴۳. m را چنان حساب کنید که معادله‌ی زیر دارای دو ریشه باشد که یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد.

$$(m+2)x^{2}-(7m+23)x+22m-26=0$$

۴۴. در معادله‌ی $x^2 - ax + 4 = 0$، مقدار a را چنان به‌دست آورید که رابطه‌ی $x_1^2 = 2x_2$ بین دو ریشه‌ی معادله برقرار باشد.

۴۵. عدد حقیقی a را طوری پیدا کنید که در معادله‌ی زیر یکی از ریشه‌ها مجذور ریشه‌ی دیگر باشد. $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$

۴۶. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن $6+\sqrt{5}$ و $6-\sqrt{5}$ باشند.

۴۷. مجموع دو عدد ۲۸ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۹۵ است. آن دو عدد کدامند؟

۴۸. مجموع دو عدد ۱۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۴۷ می‌باشد. آن دو عدد را به‌دست آورید.

۴۹. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که هر ریشه‌ی آن ۵ واحد بیش‌تر از هر ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 + 3x - 5 = 0$ باشد.

۵۰. وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۱۷ و تفاضل اضلاع زاویه‌ی قائمه آن ۷ است. طول دو ضلع زاویه‌ی قائمه را حساب کنید.

۵۱. اگر هریک از ریشه‌های معادله‌ی $mx^2 - (m-1)x + n = 0$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $5x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند مقادیر m و n را به‌دست آورید.

۵۲. a و b را چنان تعیین کنید که ریشه‌های معادله $2x^2 - (a+1)x + 1 = 0$ عکس ریشه‌های معادله $y^2 - by + b - 1$ باشند.

۵۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که بین ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 5 \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$$

۵۴. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که هریک از ریشه‌های آن از سه برابر هریک از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - mx - 1 = 0$، ۴ واحد کم‌تر باشد.

۵۵. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که بین ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} x'x'' + x' + x'' - m = 0 \\ x'x'' - m(x' + x'') + 10 = 0 \end{cases}$$

۵۶. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳۶ و مجموع مربعات سه ضلع آن ۴۵۰ می‌باشد. طول اضلاع مثلث را حساب کنید.

۵۷. معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\sqrt{۳}+۱$ و $\sqrt{۳}-۱$ باشند. سپس حاصل $(\sqrt{۳}+۱)^۶+(\sqrt{۳}-۱)^۶$ را حساب کنید.

۵۸. بدون حل معادله‌ی $۱۶x^۲-۴\sqrt{۸۵}x+۲۱=۰$ قدرمطلق تفاضل مکعبات ریشه‌های آن‌را حساب کنید.

۵۹. ثابت کنید معادله‌ی زیر به ازای هر مقدار m دارای دو ریشه‌ی حقیقی است.

$$(x-۱)(x-۳)+m(x-۲)(x-۴)=۰$$

۶۰. اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید ریشه‌های معادله‌ی زیر همیشه حقیقی‌اند.

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=۰$$

۶۱. برای کدام مقادیر صحیح k ریشه‌های معادله‌ی زیر گویا هستند؟ $(۱<k<۱۳)$

$$kx^۲-(۱-۲k)x+k=۲$$

۶۲. اگر حوزه‌ی تعریف کسر $\frac{x+۳}{x^۲+ax+b}$ برابر با $D=R-\{۲\}$ باشد a و b را تعیین کنید.

۶۳. مقدار a را در معادله‌ی زیر چنان تعیین کنید که $x_۱^۲+x_۲^۲$ مینیمم باشد.

$$x^۲-ax+a-۱=۰$$

۶۴. ثابت کنید معادلات زیر دارای ریشه‌های حقیقی‌اند.

الف) $\frac{۱}{x-a}+\frac{۱}{x-b}=\frac{۱}{c^۲}$

ب) $(a-b+۱)x^۲+۲x+b-a+۱=۰$

۶۵. ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-px+q=۰$ دو عدد صحیح متوالی‌اند. ثابت کنید:

$$p^۲-۴q=۱$$

۶۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-px+q=۰$ باشند، معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش $\frac{\alpha}{\beta^۲}$ و $\frac{\beta}{\alpha^۲}$ باشد.

۶۷. معادله‌ی $x^{2}+ax+b=0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. ثابت کنید به ازای همه‌ی مقادیر m معادله‌ی زیر نیز دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

$$3x^{2}+2(a+m)x+ma+b=0$$

۶۸. نشان دهید معادله‌ی $x^{2}-4bx+4b^{2}-a^{2}=0$ به ازای جمیع مقادیر a و b دارای جواب است و جواب‌های معادله را به‌دست آورید.

۶۹. نشان دهید معادله‌ی $x^{2}-2ax+3a^{2}+b^{2}=0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۷۰. α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^{2}+bx+c=0$ می‌باشند. اولاً معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش α^{-3} و β^{-3} باشند. ثانیاً با فرض $\alpha\beta^{2}=1$ ثابت کنید:

$$a^{3}+c^{3}+abc=0$$

۷۱. ثابت کنید هر دو ریشه‌ی معادله‌ی $3mx^{2}-(2m+3n)x+2n=0$ گویا هستند. $(m,n\in Q)$.

۷۲. ثابت کنید ریشه‌های معادله‌ی $a(x^{2}-1)=(b-c)x$ همواره حقیقی می‌باشند.

۷۳. مقدار k را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^{2}-7x+2k=0$ دو برابر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^{2}-5x+k=0$ باشد.

۷۴. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x^{4}-5x^{3}+5x-2=0$

ب) $2x^{4}-x^{3}-6x^{2}-x+2=0$

ج) $2x^{5}+5x^{4}-13x^{3}-13x^{2}+5x+2=0$

د) $6x^{6}-5x^{5}-32x^{4}-10x^{3}-32x^{2}-5x+6=0$

۷۵. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^{2}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2}=8$$

۷۶. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۴x}{x^{۲}+x+۳}+\frac{۵x}{x^{۲}-۵x+۳}=-\frac{۳}{۲}$$

(راهنمایی: صورت و مخرج هریک از کسرهای طرف اول را بر $x \neq ۰$ تقسیم کنید و $y=x+\frac{۳}{x}$ را مجهول کمکی اختیار کنید.)

۷۷. معادله‌ی $\frac{x^{۲}}{۳}+\frac{۴۸}{x^{۲}}=۱۰\left(\frac{x}{۳}-\frac{۴}{x}\right)$ را حل کنید.

(راهنمایی: $y=\frac{x}{۳}-\frac{۴}{x}$ را درنظر بگیرید.)

فصل سیزدهم

نامساوی‌ها و نامعادلات

☆ اصول نامساوی‌ها

می‌دانیم بر روی محور اعداد حقیقی عدد صفر مبدأ مقایسه‌ی اعداد می‌باشد. هر عدد مانند x واقع در سمت راست صفر را مثبت نامیده می‌نویسیم $x > \circ$ و هر عدد مانند y واقع در سمت چپ صفر را منفی نامیده و می‌نویسیم $y < \circ$.



به این ترتیب می‌توان گفت که $\mathbb{R}$ اجتماع سه مجموعه‌ی جدا از هم به صورت زیر است.

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ x < \circ\} \cup \{\circ\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ x > \circ\}$$

برای راحتی کار، مجموعه‌ی اعداد حقیقی منفی را با $\mathbb{R}^-$ و مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت را با $\mathbb{R}^+$ نشان می‌دهیم. لذا می‌توان گفت: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{\circ\} \cup \mathbb{R}^+$.

$\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}^-$ را به صورت زیر نیز با علائم ریاضی تعریف می‌کنند.

$$\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ x = k^{۲}\ ,\ k \neq \circ\}$$

$$\mathbb{R}^- = \{-x \mid x \in \mathbb{R}^+\}$$

پس به ازاء هر $x \in \mathbb{R}$ می‌توان نوشت: $x \in \mathbb{R}^-$ یا $x \in \mathbb{R}^+$ یا $x = \circ$. می‌پذیریم که $\mathbb{R}^+$ نسبت به جمع و ضرب بسته است و $\mathbb{R}^-$ نسبت به جمع بسته است. یعنی به ازای هر x و y از $\mathbb{R}^+$:

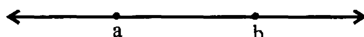
$$x + y \in \mathbb{R}^+\ ,\ xy \in \mathbb{R}^+$$

و به ازای هر x و y از $\mathbb{R}^-$:

$$x + y \in \mathbb{R}^-$$

☆تعریف رابطه‌ی کوچک‌تری «$<$»

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند که بر روی محور a سمت چپ b باشد. در این‌صورت گوییم a، کوچک‌تر از b است و می‌نویسیم $a<b$.



در این‌حالت همچنین می‌توان گفت که b از a بزرگ‌تر است و نوشت $b>a$. به عبارت دیگر:

$$a<b \Leftrightarrow a-b\in\mathbb{R}^-$$

$$a<b \Leftrightarrow b-a\in\mathbb{R}^+$$

مثال ۱:

$$۲-۳=-۱\in\mathbb{R}^- \Rightarrow ۲<۳$$

$$\frac{-۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{-۵}{۶}\in\mathbb{R}^- \Rightarrow \frac{-۱}{۲}<\frac{۱}{۳}$$

$$۳-۳=۰\notin\mathbb{R}^- \ ,\ ۳-۳=۰\notin\mathbb{R}^+ \Rightarrow ۳\not<۳$$

قضیه: به ازاء هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید فقط یکی از عبارت‌های زیر صحیح است.

$$a=b \text{ یا } a<b \text{ یا } a>b$$

برهان: $a-b$ را درنظر بگیرید. اگر $a-b=۰$ آن‌گاه $a=b$. فرض کنیم $a-b\neq۰$ در این‌صورت $a-b\in\mathbb{R}^-$ یا $a-b\in\mathbb{R}^+$ و از آن‌جا به‌دست می‌آید که $a<b$ یا $b<a$ که حکم ثابت می‌شود.

قضیه: به ازای هر سه عدد حقیقی a، b و c ثابت کنید: (خاصیت تعدّی)

$$a<b \text{ و } b<c \Rightarrow a<c$$

برهان:

$$\left.\begin{array}{l} a<b \Rightarrow a-b\in\mathbb{R}^- \\ b<c \Rightarrow b-c\in\mathbb{R}^- \end{array}\right. \xrightarrow[\text{نسبت به جمع}]{\text{بسته‌بودن } \mathbb{R}^-} (a-b)+(b-c)\in\mathbb{R}^-$$

$$\Rightarrow a-c\in\mathbb{R}^- \Rightarrow a<c$$

قضیه: به ازاء هر سه عدد حقیقی a، b و c ثابت کنید:

$$a<b \Rightarrow a+c<b+c$$

یعنی می‌توان به طرفین نامساوی، عددی را افزود.

اثبات: $a<b \Rightarrow a-b\in \mathbb{R}^- \Rightarrow a-b+c-c\in \mathbb{R}^-$

$\Rightarrow (a+c)-(b+c)\in \mathbb{R}^- \Rightarrow a+c<b+c$

قضیه: به ازاء هر سه عدد حقیقی a ، b و c ثابت کنید:

$$a<b \Rightarrow a-c<b-c$$

یعنی می‌توان از طرفین یک نامساوی عددی را کم کرد.

اثبات: به عهده‌ی دانش‌آموز.

قضیه: اگر $b\in \mathbb{R}$ و a و $c\in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید:

$$a<b \Rightarrow ac<bc$$

یعنی طرفین یک نامساوی را می‌توان در عددی مثبت ضرب کرد که در این‌صورت جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

اثبات: $a<b \Rightarrow b-a\in \mathbb{R}^+$ و $c\in \mathbb{R}^+$

$\xrightarrow[\text{نسبت به ضرب}]{\text{بسته بودن } \mathbb{R}^+} (b-a)\times c\in \mathbb{R}^+ \Rightarrow bc-ac\in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac<bc$

قضیه: اگر $b\in \mathbb{R}$ و a و $c\in \mathbb{R}^-$ ، ثابت کنید:

$$a<b \Rightarrow ac>bc$$

یعنی اگر طرفین یک نامساوی را در عددی منفی ضرب کنیم جهت نامساوی عوض می‌شود.

اثبات: چون $c \in \mathbb{R}^-$، لذا $-c \in \mathbb{R}^+$، بنابر قضیه‌ی فوق:

$$a < b \ , \ -c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -ac < -bc$$

$$\Rightarrow -ac - (-bc) \in \mathbb{R}^- \Rightarrow bc - ac \in \mathbb{R}^-$$

$$\Rightarrow bc < ac \Rightarrow ac > bc$$

قضیه: اگر $a > ۰$ و $b < ۰$، ثابت کنید $ab < ۰$.

اثبات: $a > ۰ \ , \ b < ۰ \Rightarrow ba < ۰ \times a \Rightarrow ab < ۰$

قضیه: اگر $a < ۰$ و $b < ۰$، ثابت کنید $ab > ۰$.

اثبات: $\left.\begin{matrix} a < ۰ \\ b < ۰ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{بنابر قضیه}} a \times b > ۰ \times b \Rightarrow ab > ۰$

مثال ۲ : **نشان دهید اگر $a \in \mathbb{R}^-$ آن‌گاه $a^۲ \in \mathbb{R}^+$.**

حل:

بنابر قضیه‌ی بالا: $a < ۰ \ , \ a < ۰ \Rightarrow a \times a > ۰ \Rightarrow a^۲ > ۰ \Rightarrow a^۲ \in \mathbb{R}^+$

مثال ۳ : **نشان دهید اگر $a \in \mathbb{R}^-$ آن‌گاه اگر n فرد باشد $a^n < ۰$ و اگر n زوج باشد $a^n > ۰$.**

حل:

به عهده‌ی دانش‌آموز.

مشخص است که بنابر توضیحات فوق اگر $a > ۰$ یا $a < ۰$ باشد آن‌گاه $a^۲ > ۰$. در حالت خاص $۱ = ۱^۲ \in \mathbb{R}^+$.

قضیه: اگر $a > ۰$، ثابت کنید $\frac{۱}{a} > ۰$.

اثبات: می‌دانیم $\frac{۱}{a} \neq ۰$ فرض کنیم $\frac{۱}{a} < ۰$ (فرض خلف) در این‌صورت:

$$a > ۰ \;,\; \frac{۱}{a} < ۰ \Rightarrow a \times \frac{۱}{a} < ۰ \times \frac{۱}{a} \Rightarrow ۱ < ۰ \Rightarrow ۱ \in \mathbb{R}^-$$

که این با $۱ \in \mathbb{R}^+$ تناقض دارد. بنابراین فرض خلف باطل است. پس $\frac{۱}{a} > ۰$.

قضیه: اگر $a < ۰$ ثابت کنید $\frac{۱}{a} < ۰$.

اثبات:

$$a < ۰ \Rightarrow -a > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{-a} > ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{a} < ۰$$

این دو قضیه نشان می‌دهند که $\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}^-$ نسبت به عمل وارون کردن بسته‌اند.

قضیه: اگر $a < b$ و a و $b \in \mathbb{R}^+$ نشان دهید $\frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}$.

اثبات: چون a و $b \in \mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}^+$ نسبت به ضرب بسته است، لذا $ab \in \mathbb{R}^+$ و از آن‌جا $\frac{۱}{ab} \in \mathbb{R}^+$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R}^+ \;,\; a < b \\ \frac{۱}{ab} > ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{۱}{ab} \times a < \frac{۱}{ab} \times b \\ \frac{۱}{b} < \frac{۱}{a} \Rightarrow \frac{۱}{a} > \frac{۱}{b} \end{array}$$

قضیه: اگر $a < b$ و a و $b \in \mathbb{R}^-$ نشان دهید $\frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}$.

اثبات: چون $b \in \mathbb{R}^-$ و a، بنابر قضیه‌های خوانده شده $ab \in \mathbb{R}^+$ و لذا $\frac{1}{ab} \in \mathbb{R}^+$ و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R}^- \ , \ a < b \\ \frac{1}{ab} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{ab} \times a < \frac{1}{ab} \times b \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \end{array}$$

دو قضیه‌ی فوق نشان می‌دهند که طرفین یک نامساوی را به شرط آن‌که هر دو طرف نامساوی هم‌علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی) می‌توان وارون کرد. در این‌صورت جهت نامساوی عوض می‌شود.

مثال ۴ : اگر $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ و $b, d > 0$، ثابت کنید $ad < bc$ و بالعکس.

حل:

چون $b, d > 0$ لذا $bd > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ bd > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow bd \times \frac{a}{b} < bd \times \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc$$

اینک فرض کنیم $ad < bc$ و $b, d > 0$ پس $bd > 0$ و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ad < bc \\ bd > 0 \Rightarrow \frac{1}{bd} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ad \times \frac{1}{bd} < bc \times \frac{1}{bd} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

پس اگر $b, d > 0$ آن‌گاه:

$$\boxed{\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc}$$

مثال ۵ : اگر $a < 0$ و $b > 0$، ثابت کنید $\frac{a}{b} < 0$.

حل:

$$a \in \mathbb{R}^- , b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \in \mathbb{R}^- \ , \ \frac{1}{b} \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^- \Rightarrow \frac{a}{b} < 0$$

مثال ۶ : اگر $a > 0$ و $b < 0$، ثابت کنید $\frac{a}{b} < 0$.

حل:

$$a \in \mathbb{R}^{+}, b \in \mathbb{R}^{-} \Rightarrow a \in \mathbb{R}^{+}, \frac{1}{b} \in \mathbb{R}^{-} \Rightarrow a \times \frac{1}{b} \in \mathbb{R}^{-}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^{-} \Rightarrow \frac{a}{b} < 0$$

مثال ۷ : اگر $a < b$، ثابت کنید $a < \frac{a+b}{2} < b$.

حل:

$$a < b \Rightarrow a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} \qquad (1)$$

$$a < b \Rightarrow a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$$

☆ بازه (فاصله)

مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین دو عدد a و b را یک بازه می‌نامیم. اگر $a < b$ باشد آن‌را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ , \ a < x < b\}$$

مجموعه‌ی A را با نمادهای (a,b) یا $]a,b[$ نیز نشان می‌دهند. اگر مجموعه‌ی A شامل a یا b یا شامل هر دو عضو a و b باشند می‌توانیم آن‌را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} , a \le x < b\} = [a,b) = [a,b[$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} , a < x \le b\} = (a,b] =]a,b]$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} , a \le x \le b\} = [a,b]$$

همچنین مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از a را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

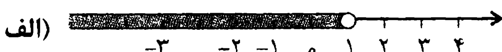
$$\{x \mid x \in \mathbb{R} , x < a\} = (-\infty, a)$$

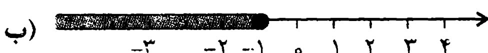
مثال ۸ : بازه‌های $(۲,۵]$ ، $[-۳,۷]$ ، $[۷,۱۳)$ ، $(-\infty,۹)$ و $[-۶,+\infty)$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

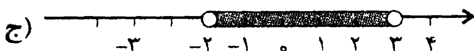
حل:

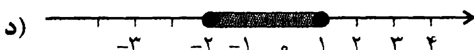
$$(۲,۵]=\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ ۲<x\leq ۵\}$$
$$[-۳,۷]=\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ -۳\leq x\leq ۷\}$$
$$[۷,۱۳)=\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ ۷\leq x<۱۳\}$$
$$(-\infty,۹)=\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ x<۹\}$$
$$[-۶,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ -۶\leq x\}$$

مثال ۹ : هریک از نمودارهای زیر را به صورت بازه مشخص کنید.

الف)


ب)


ج)


د)


حل:

الف) $\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ x<۱\}=(-\infty,۱)$

ب) $\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ x\leq ۱\}=(-\infty,-۱]$

ج) $\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ -۲<x<۳\}=(-۲,۳)$

د) $\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ -۲\leq x\leq ۱\}=[-۲,۱]$

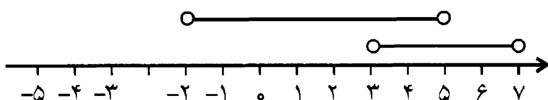
مثال ۱۰ : در بازه‌ی $(-۲,۵]$ چند عدد صحیح وجود دارد؟ آن‌ها را نام ببرید.

حل:

هفت عدد صحیح که عبارتند از: ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵.

مثال ۱۱ : حاصل $(-۲,۵)\bigcap(۳,۷)$ چیست؟

حل:



$$(۳,۷)\bigcap(-۲,۵)=(۳,۵)$$

مثال ۱۲ : حاصل $(-۲,۲)\bigcap(-۵,۵)$ چیست؟

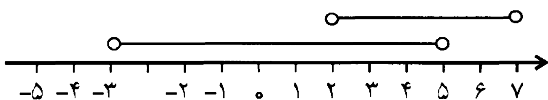
حل:

با توجه به این‌که $(-۲,۲)\subset(-۵,۵)$ می‌باشد می‌توان گفت:

$$(-۵,۵)\bigcap(-۲,۲)=(-۲,۲)$$

مثال ۱۳ : حاصل $(۲,۷)\bigcup(-۳,۵)$ چیست؟

حل:



$$(-۳,۵)\bigcup(۲,۷)=(-۳,۷)$$

مثال ۱۴ : حاصل $\left(-\frac{۱}{۱۰},\frac{۱}{۱۰}\right)\bigcap\ldots\bigcap\left(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}\right)\bigcap\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)\bigcap(-۱,۱)$ چیست؟

حل:

بازه‌ی $\left(-\frac{۱}{۱۰},\frac{۱}{۱۰}\right)$ زیرمجموعه‌ی همه‌ی بازه‌های دیگر می‌باشد. بنابراین اشتراک همه‌ی بازه‌ها بازه‌ی $\left(-\frac{۱}{۱۰},\frac{۱}{۱۰}\right)$ است.

مثال ۱۵ : اگر $۰<a<۱$، ثابت کنید به ازاء هر عدد طبیعی مانند n داریم: $۰<a^n<۱$.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}a<۱\\a>۰\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^۲<a\\a<۱\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^۲<۱\\a>۰\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^۳<a\\a<۱\end{array}\right\}\Rightarrow a^۳<۱$$

به همین ترتیب $a^n < 1$. چون $a > 0$ پس هر توانی از a نیز مثبت است. لذا

$$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^n < 1$$

مثال ۱۶: اگر $0 < a < 1$ و m و n دو عدد صحیح باشند که $m < n$. ثابت کنید $a^m > a^n$.

✎ **حل:**

$$m, n \in \mathbb{Z}\ ,\ m < n \Rightarrow n - m > 0 \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$$

بنابر مثال قبل:

$$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^{n-m} < 1$$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \dfrac{a^n}{a^m} < 1 \\ a^m > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < a^n < a^m \Rightarrow a^m > a^n$$

مثال ۱۷: اگر $0 < a < 1$ باشد a^{-3} و a^{-7} و a^{10} را مقایسه کنید.

✎ **حل:**

با توجه به مثال بالا:

$$a^{-7} > a^{-3} > a^{10}$$

نکته: اگر a و b و c اعداد مثبت بوده و داشته باشیم $a < b$ و $c < d$ آن‌گاه $ac < bd$.

نکته: اگر a و b مثبت باشند و $a < b$، آن‌گاه $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

نامساوی میانگین حسابی و هندسی

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند $\frac{a+b}{2}$ را میانگین حسابی و در صورت متحدالعلامه بودن a و b، $\sqrt{ab}$ را میانگین هندسی a و b می‌گویند.

در حالت کلّی اگر a_1، a_2، ... و a_n اعداد حقیقی باشند، $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ را میانگین حسابی و $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ را (در صورت معنی‌دار بودن) میانگین هندسی این اعداد می‌گویند.

قضیه: به ازاء هر دو عدد حقیقی نامنفی ثابت کنید: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$

اثبات: در این قضیه می‌خواهیم نشان دهیم که به ازاء هر دو عدد حقیقی نامنفی، میانگین حسابی آن دو عدد از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست. چون a و b اعداد نامنفی‌اند $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ موجود است داریم:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲} \geq ۰ \Rightarrow a+b-۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Rightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$$

شرط تساوی در این قضیه زمانی برقرار است که $a=b$.

قضیه‌ی فوق به ازاء هر n عدد حقیقی نامنفی برقرار است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{a_۱+a_۲+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_۱a_۲...a_n}$$

این قضیه به قضیه‌ی نابرابری میانگین حسابی و هندسی معروف است و باز هم تساوی زمانی رخ می‌دهد که داشته باشیم: $a_۱=a_۲=...=a_n$

مثال ۱۸: اگر $x > ۰$، نشان دهید: $x+\frac{۱}{x} \geq ۲$.

حل:

بنابر قضیه‌ی فوق:

$$\frac{x+\frac{۱}{x}}{۲} \geq \sqrt{x \times \frac{۱}{x}} \Rightarrow x+\frac{۱}{x} \geq ۲$$

مثال ۱۹: اگر $x < ۰$، ثابت کنید $x+\frac{۱}{x} \leq -۲$.

حل:

چون $x < ۰$ درنتیجه $-x > ۰$ و می‌توان قضیه را برای $-x$ به کار برد.

$$\frac{-x+\left(-\frac{۱}{x}\right)}{۲} \geq \sqrt{(-x)\times\left(\frac{-۱}{x}\right)} \Rightarrow -\left(x+\frac{۱}{x}\right) \geq ۲ \Rightarrow x+\frac{۱}{x} \leq -۲$$

مثال ۲۰ : a ، b و c سه عدد مثبت‌اند. ثابت کنید: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$

حل:

بنابر نامساوی میانگین حسابی و هندسی داریم:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$$

همچنین:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

با استفاده از مثال:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\sqrt[3]{abc}\times 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$$

مثال ۲۱ :به ازاء هر دو عدد حقیقی مثبت a و b ثابت کنید:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

حل:

می‌دانیم اگر a و b مثبت باشند آن‌گاه: $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$. (نامساوی میانگین حسابی و هندسی) کافیست نشان دهیم.

$$(1)\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab} \quad \text{و} \quad (2)\ \frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

بنابر نامساوی میانگین حسابی و هندسی:

$$a,b>0 \Rightarrow \frac{1}{a},\frac{1}{b}>0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}$$

همچنین:

$$a,b>0 \Rightarrow a^2,b^2>0 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \times b^2} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} \geq \dfrac{a+b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ را میانگین همساز (توافقی) و $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ را جذر میانگین مربعات a و b گویند.

مثال ۲۲ : **اگر $y=\dfrac{x^2}{x^4+25}$، نشان دهید $0 \leq y \leq \dfrac{1}{10}$.**

حل:

بدیهی است که $y \geq 0$ است. فرض کنیم $y \neq 0$، در این‌صورت:

$$\frac{1}{y}=\frac{x^4+25}{x^2}=x^2+\frac{25}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{25}{x^2}}=10 \Rightarrow y \leq \frac{1}{10}$$

نامعادله: نامساوی‌هایی مانند $2x-1<3$ و $3x+1<2x-7$ را نامعادله می‌نامیم هدف از حل نامعادله پیدا کردن مجموعه‌ی اعدادی است که تمام اعضای آن در نامعادله صدق کنند.

مثال ۲۳ : مجموعه جواب هریک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $2x-1<3$

ب) $3x-2 \geq 2x-5$

ج) $\dfrac{x-1}{3}<1$

د) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3x+1}{2} \geq x$

حل:

الف) $2x-1<3 \Rightarrow 2x<4 \Rightarrow x<2 \qquad A=(-\infty,2)$

ب) $3x-2 \geq 2x-5 \Rightarrow 3x-2x \geq 2-5 \Rightarrow x \geq -3 \qquad B=[-3,+\infty)$

ج) $\frac{x-۱}{۳}<۱ \Rightarrow x-۱<۳ \Rightarrow x<۴ \qquad C=(-\infty,۴)$

$$\frac{۲x-۱}{۳}-\frac{۳x+۱}{۲}\geq x \Rightarrow ۲(۲x-۱)-۳(۳x+۱)\geq ۶x$$

$$\Rightarrow ۴x-۲-۹x-۳\geq ۶x \Rightarrow -۵x-۵\geq ۶x \Rightarrow -۱۱x\geq ۵ \Rightarrow x\leq -\frac{۵}{۱۱}$$

$$D=\left(-\infty,\frac{-۵}{۱۱}\right]$$

مثال ۲۴ : نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۵x-۱}{۴}-\frac{۳x-۱۳}{۱۰}>\frac{۵x+۱}{۳}$$

حل:

$$۶۰\times\frac{۵x-۱}{۴}-۶۰\times\frac{۳x-۱۳}{۱۰}>۶۰\times\frac{۵x+۱}{۳}$$

$$۱۵(۵x-۱)-۶(۳x-۱۳)>۲۰(۵x+۱)$$

$$۷۵x-۱۵-۱۸x+۷۸>۱۰۰x+۲۰$$

$$۵۷x+۶۳>۱۰۰x+۲۰ \Rightarrow -۴۳x>-۴۳ \Rightarrow x<۱$$

مثال ۲۵ : نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۳x-۱}{۵}-\frac{x+۱}{۲}<۱-\frac{x}{۷}$$

حل:

$$۷۰\times\frac{۳x-۱}{۵}-۷۰\times\frac{x+۱}{۲}<۷۰-۷۰\times\frac{x}{۷}$$

$$۱۴(۳x-۱)-۳۵(x+۱)<۷۰-۱۰x$$

$$۴۲x-۱۴-۳۵x-۳۵<۷۰-۱۰x$$

$$۷x-۴۹<۷۰-۱۰x \Rightarrow ۱۷x<۱۱۹ \Rightarrow x<۷$$

مثال ۲۶ : حداقل مقدار عدد طبیعی n را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$n^{۳۰۰}\geq ۸۱^{۴۵۰}$$

حل:

$$n^{300} \geq 81^{450} \Rightarrow n^{300} \geq 9^{900} \Rightarrow n^{300} \geq (9^3)^{300} \Rightarrow n \geq 9^3 = 729$$

حداقل مقدار طبیعی n برابر ۷۲۹ است.

مثال ۲۷ : مقادیر طبیعی n را چنان بیابید که داشته باشیم: $16^{2n-1} > 8^{n+7}$.

حل:

$$16^{2n-1} > 8^{n+7} \Rightarrow 2^{8n-4} > 2^{3n+21} \Rightarrow 8n-4 > 3n+21 \Rightarrow 5n > 25$$
$$\Rightarrow n > 5 \quad n \in \{6,7,8,9,\ldots\}$$

مثال ۲۸ : حداقل مقدار عدد طبیعی n را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} > \frac{1377}{1380}$$

حل:

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$
$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} > \frac{1377}{1380} \Rightarrow \frac{n}{n+1} > \frac{1377}{1380}$$
$$\Rightarrow 1380n > 1377(n+1) \Rightarrow n > 459$$

پس حداقل مقدار طبیعی n برابر ۴۶۰ است.

مثال ۲۹ : حداقل مقدار n چقدر باشد تا: $1+2+3+\ldots+n > 66$.

حل:

به راحتی می‌توان دید که $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

$$\frac{n(n+1)}{2} > 66 \Rightarrow n(n+1) > 132 \Rightarrow n(n+1) > 11\times 12$$

می‌دانیم n و $n+1$ دو عدد متوالی‌اند. نامساوی اخیر نشان می‌دهد که باید داشته باشیم $n > 11$ و چون n عددی طبیعی است، حداقل مقدار n برابر ۱۲ است.

☆ دستگاه نامعادلات (نامعادلات توأم)

گاهی اوقات با نامعادله‌هایی مواجه می‌شویم که متغیر آن‌ها همزمان باید در بیش از یک شرط صدق کند. یافتن جواب برای این نامعادله منجر به حل یک دستگاه نامعادله می‌شود.

مثال ۳۰ : مجموعه‌ی جواب هریک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

الف) $3 \le 2x - 1 < 5$ ب) $-3 < \frac{x+1}{5} \le -1$

✎ حل:

الف) $3 \le 2x - 1 < 5 \Rightarrow 3+1 \le 2x < 5+1 \Rightarrow \frac{4}{2} \le x < \frac{6}{2}$

$\Rightarrow 2 \le x < 3 \quad A = [2,3)$

ب) $-3 < \frac{x+1}{5} \le -1 \Rightarrow 5\times(-3) < x+1 \le 5\times(-1) \Rightarrow -15-1 < x < -5-1$

$\Rightarrow -16 < x \le -6 \qquad A = (-16,-6]$

مثال ۳۱ :دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x+1 \ge 3x-2 \\ 5x-2 < 7x+4 \end{cases}$$

✎ حل:

هر نامعادله را جداگانه حل کرده و مجموعه جواب آن‌ها را مشخص می‌کنیم. اشتراک آن‌ها مجموعه جواب دستگاه خواهد بود.

$$\begin{cases} 2x+1 \ge 3x-2 \\ 5x-2 < 7x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3x \ge -2-1 \\ 5x-7x < 4+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x \ge -3 \\ -2x < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x > -3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A = (-\infty,3] \\ B = (-3,+\infty) \end{matrix}$$

$A \cap B = (-3,3]$

مثال ۳۲ : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{۲x-۱}{۳} < \frac{۳-x}{۵} \\ ۱-\frac{۲(x-۱)}{۳} < \frac{۳-x}{۲} \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} ۱۵\times\frac{۲x-۱}{۳} < ۱۵\times\frac{۳-x}{۵} \\ ۶-۶\times\frac{۲(x-۱)}{۳} < ۶\times\frac{۳-x}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۰x-۵ < ۹-۳x \\ ۶-۴x+۴ < ۹-۳x \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱۳x < ۱۴ \\ -x < -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{۱۴}{۱۳} \\ x > ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱ < x < \frac{۱۴}{۱۳}$$

مثال ۳۳ : نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۵-۲x \le \frac{۲x-۱}{۳} \le ۳$$

حل:

$$\begin{cases} ۵-۲x \le \frac{۲x-۱}{۳} \\ \frac{۲x-۱}{۳} \le ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۵-۶x \le ۲x-۱ \\ ۲x-۱ \le ۹ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -۸x \le -۱۶ \\ ۲x \le ۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge ۲ \\ x \le ۵ \end{cases} \Rightarrow ۲ \le x \le ۵$$

مثال ۳۴ : یک استخر شنا ۲۰۰۰ تومان ورودی می‌گیرد و به ازای هر ساعت مبلغ ۷۵۰ تومان اضافه می‌گیرد. مسعود ۴۵۰۰ تومان پول دارد او حداکثر چند ساعت می‌تواند در استخر بماند؟

حل:

فرض می‌کنیم او x ساعت در استخر بماند.

$$۲۰۰۰+۷۵۰x \leq ۴۵۰۰ \Rightarrow ۷۵۰x \leq ۲۵۰۰ \Rightarrow x \leq ۳/۳$$

مسعود حداکثر ۳ ساعت می‌تواند در استخر بماند.

مثال ۳۵ : چند جفت عدد طبیعی متوالی وجود دارد که مجموع آن‌ها از ۵۰ کوچک‌تر باشد ولی از ۳۰ کوچک‌تر نباشد.

حل:

$$۳۰ \leq x+(x+۱)<۵۰$$

$$۳۰ \leq ۲x+۱<۵۰ \Rightarrow ۲۹ \leq ۲x<۴۹ \Rightarrow \frac{۲۹}{۲} \leq x<\frac{۴۹}{۲} \Rightarrow ۱۴/۵ \leq x<۲۴/۵$$

بنابراین x یکی از اعداد ۱۵ تا ۲۴ می‌باشند که تعداد آن‌ها ۱۰ تاست.

مثال ۳۶ : تعداد کتب علمی در یک کتابخانه برابر با $\frac{۱۱}{۱۳}$ تعداد کتاب‌های هنری این کتابخانه می‌باشد. برای انتقال کتابخانه به شهری دیگر، کتاب‌ها را در دو واگن جا داده‌اند. $\frac{۱}{۱۵}$ کتب علمی و $\frac{۱۸}{۱۹}$ کتب هنری در واگن اول و بقیه در واگن دوم قرار دارند. اگر بدانیم در واگن اول بیش از ۱۰۰۰۰ کتا ب و در واگن دوم کم‌تر از ۱۰۰۰۰ کتاب جا گرفته است، تعداد کتب علمی و هنری کتاب‌خانه را تعیین کنید.

حل:

فرض کنیم x تعداد کتب هنری باشد. با توجه به فرض مسأله تعداد کتاب‌های علمی $\frac{۱۱}{۱۳}x$ است و داریم:

$$\begin{cases} \frac{۱}{۱۵}\times\frac{۱۱}{۱۳}x+\frac{۱۸}{۱۹}x>۱۰۰۰۰ \\ \frac{۱۴}{۱۵}\times\frac{۱۱}{۱۳}x+\frac{۱}{۱۹}\times x<۱۰۰۰۰ \end{cases}$$

اولاً: دستگاه فوق نشان می‌دهد که x باید مضربی از $۱۵\times۱۳\times۱۹=۳۷۰۵$ باشد.

ثانیاً: اگر هر دو نامعادله‌ی دستگاه را ساده کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{۳۷۰۵۰۰۰۰}{۳۷۱۹} < x < \frac{۳۷۰۵۰۰۰۰}{۳۱۲۱}$$

که از آن‌جا بدست می‌آید: $۹۹۶۳ \leq x \leq ۱۱۸۷۱$. قرار می‌دهیم $x = ۳۷۰۵k$.

خواهیم داشت: $۲/۶۸ \leq k \leq ۳/۲$

که تنها جواب صحیح برای k عبارتست از: $k = ۳$. پس مقدار x خواهد شد:

$x = ۳ \times ۳۷۰۵ = ۱۱۱۱۵$. یعنی تعداد کتاب‌های هنری ۱۱۱۱۵و تعداد کتاب‌های علمی $\frac{۱۱}{۱۳} \times ۱۱۱۱۵ = ۱۴۰۵$ می‌باشد.

تمرین‌های فصل سیزدهم

۱. اگر $\frac{۱}{۳} < a$، ثابت کنید: $a > \frac{۸a + ۱}{۳a + ۱۰} > \frac{۱}{۳}$.

۲. اگر $۲ < a$، نشان دهید: $a > \frac{۵a + ۲}{a + ۴} > ۲$.

۳. طرف دوم تساوی‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.

الف) $(-۱,۲] \cap [۰,۳)$

ب) $(-۳,۲] \cap (-۲,۳] \cap (-۱,۴]$

ج) $(-۳,۲] \cup [-۲,۱)$

د) $(-۱۰,۵] \cup [-۸,۱۰)$

هـ) $(-۱,۱) - \left(\frac{۱}{۲},۱\right)$

و) $[-۲,۲] - (-۱,۱)$

ز) $(-\infty,۰) \cap (-۴,+\infty)$

ح) $(۰,+\infty) - (۵,+\infty)$

۴. اگر a عددی مثبت باشد به کمک اتحادها ثابت کنید $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$.

۵. ثابت کنید $a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + ac + bc$.

۶. ثابت کنید $a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۳ \geq ۲(a + b + c)$.

۷. ثابت کنید $a^۲ + ab + b^۲ \geq ۰$.

۸. اگر a و b اعدادی مثبت باشند ثابت کنید.

$$\frac{a}{b^۲} + \frac{b}{a^۲} \geq \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$$

۹. اگر a و b اعدادی مثبت باشند ثابت کنید.

$$(a + b)\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}\right) \geq ۴$$

۱۰. اگر $ab > ۰$ باشد ثابت کنید $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq ۲-$.

۱۱. ثابت کنید $(a+b)(b+c)(c+a) \geq ۸abc$.

۱۲. ثابت کنید $(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲) \geq ۹abc$.

۱۳. ثابت کنید $۳a^۲+۳b^۲-۲b+۲a+۱>۰$.

۱۴. اعداد $۳۱^{۱۱}$ و $۱۷^{۱۴}$ را مقایسه کنید.

۱۵. فرض کنید $A=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۵}{۶}\times\ldots\times\frac{۹۹}{۱۰۰}$ و $B=\frac{۲}{۳}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۶}{۷}\times\ldots\times\frac{۹۸}{۹۹}$. ثابت کنید $A<B<۲A$.

۱۶. کسرهای $\frac{a_۱}{b_۱},\frac{a_۲}{b_۲},\ldots,\frac{a_n}{b_n}$ را با مخرج مثبت درنظر بگیرید. ثابت کنید کسر $\frac{a_۱+a_۲+\ldots+a_n}{b_۱+b_۲+\ldots+b_n}$ از کوچک‌ترین کسر کم‌تر نیست و از بزرگ‌ترین کسر بیش‌تر نیست.

۱۷. مجموعه‌ی جواب هریک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

الف) $\frac{۲x+۱}{۳}-۱<x$

ب) $\frac{-۲(x-۱)}{۳}-\frac{۳(x+۱)}{۲} \geq ۵$

ج) $\frac{x-۱}{۲} \leq \frac{۲}{۳} < \frac{۲x-۱}{۵}$

د) $\frac{-۱}{۲} < \frac{۲x-۱}{۳} < \frac{۲}{۷}$

هـ) $\frac{۲x-۳}{x^۲+۱}<۰$

و) $\frac{(x+۱)^۲}{۳x-۴} \leq ۰$

ز) $x+\frac{۱}{x}<۰$

ح) $-۲(۳x+۴)-(۲-x) \geq ۱-۴x$

ط) $\frac{۸x+۵}{۹}-\frac{۲x+۲۳}{۶} > \frac{x+۴}{۴}-\frac{x}{۱۲}$

۱۸. مجموعه‌ی جواب هریک از دستگاه‌های نامعادلات زیر را تعیین کنید.

الف) $\begin{cases} \frac{x+۱}{۵}-\frac{۱-x}{۲}\leq x \\ \frac{۲x+۱}{۳}-\frac{۳x+۱}{۲}<x \end{cases}$

ب) $\begin{cases} ۲x+۱<\frac{-۳x+۱}{۵}\leq -x \\ x+۱\leq \frac{۱-x}{۴}\leq x+۱۰ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} ۹x-۱۵>۴x+۱۳ \\ ۱۹-۵x>۷+۳x \end{cases}$

د) $\begin{cases} ۲x+۵>۵x-۴ \\ x-۷<۲x-۳ \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} \frac{x+۵}{۶}+\frac{x+۹}{۸}>\frac{۲x+۷}{۹} \\ \frac{x+۵}{۴}-\frac{x-۳}{۶}<\frac{x}{۳} \end{cases}$

و) $\begin{cases} \frac{x-۱}{۳}+\frac{۴(۲x-۳)}{۹}<\frac{۵x+۱}{۸} \\ \frac{۵x+۹}{۳}+\frac{۷x+۵}{۹}>\frac{۳x+۲۱}{۴} \end{cases}$

ز) $\begin{cases} \frac{۵x+۷}{۴}+\frac{۳x+۵}{۸}>\frac{۹x+۴}{۵} \\ \frac{۳x-۲}{۱۸}+\frac{۲x-۹}{۴۵}>\frac{x+۳}{۱۰} \end{cases}$

ح) $\begin{cases} \frac{۱۳x-۱۶}{۱۵}+\frac{x-۳۲}{۳۵}<\frac{x-۶}{۲۱} \\ \frac{۵x+۱۲}{۱۴}+\frac{۱۱x+۲۸}{۲}>\frac{۴x+۹}{۷۷} \end{cases}$

ط) $\begin{cases} ۲x+۵<۱۴-x \\ x(x+۴)<(x+۳)^۲+۱ \end{cases}$

ی) $\begin{cases} \frac{x+۱}{۳}+\frac{x-۳}{۶}>\frac{۲x-۵}{۲} \\ \frac{x+۱}{۳}+\frac{۵x+۲}{۶}>\frac{۴x+۱}{۴} \end{cases}$

ک) $\frac{x-۵}{۳}<۲x-۵\leq \frac{۱-x}{۲}$

۱۹. تعداد اعداد صحیحی را که در دستگاه نامعادلات زیر صدق می‌کنند مشخص کنید.

$$\begin{cases} \frac{۲x+۱}{۳}-x<۵ \\ \frac{x-۱}{۲}+۵x\leq ۷ \end{cases}$$

۲۰. نمرات ۲۰ درس دانش‌آموزی چنان است که در ۶ درس ۲۰ گرفته و در بقیه درس‌ها حداکثر ۱۶ گرفته است. اگر میانگین نمرات عددی صحیح باشد، بزرگ‌ترین مقدار این میانگین چه عددی می‌تواند باشد؟

۲۱. اعداد طبیعی n را چنان تعیین کنید که به ازاء آن‌ها نامعادله زیر برقرار باشد.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}\geq\frac{255}{128}$$

۲۲. مقادیر طبیعی n را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}>0/99$$

۲۳. کم‌ترین مقدار عدد طبیعی n را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$3+7+11+\dots+(4n-1)\geq 2n^2-3n+1379$$

۲۴. کوچک‌ترین عدد طبیعی n که به ازاء آن نامعادله‌ی زیر برقرار باشد چیست؟

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geq 100$$

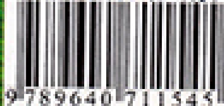
۲۵. کوچک‌ترین عدد طبیعی n را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0/01$$



از مؤلفان این کتاب، آثار زیر نیز منتشر شده است:




ISBN: 978-964-07-1154-5

انتشارات مبتکران www.mobtakeran.com
تهران، خیابان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان وحیدنظری، پلاک ۵۹
کدپستی: ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱ تلفکس: ۹۲ - ۶۶۹۵۴۳۹۰
e-mail: info @ mobtakeran.com
مرکز پخش: تهران، صندوق پستی: ۱۵۹۶ - ۱۳۱۴۵
تلفکس: ۹۵ - ۶۶۹۵۴۳۹۳